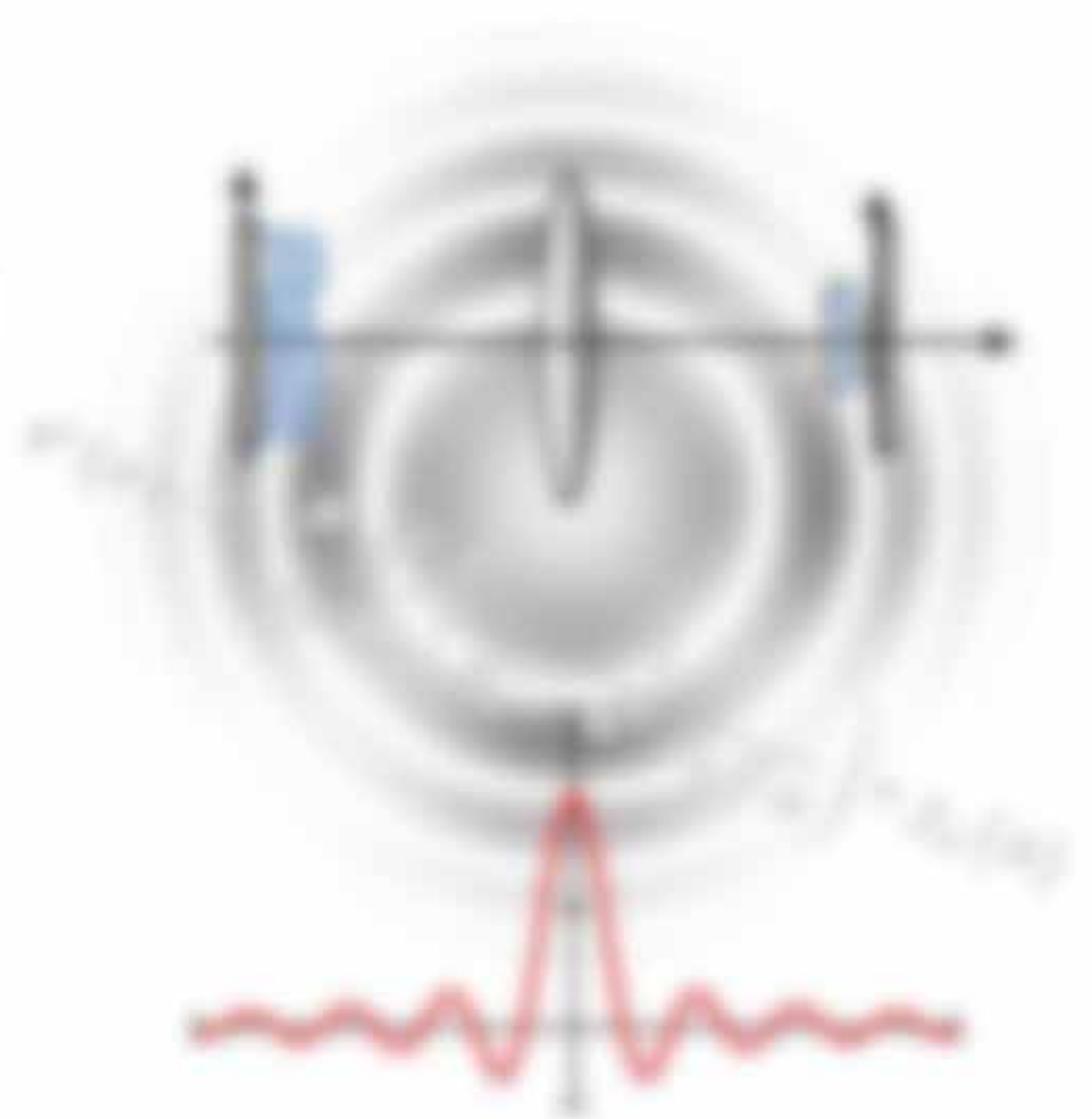


Prof. Alexander Rohrbach,
IMTEK, Universität Freiburg

Vorlesung
Wellenoptik

im SS 2015



Freie Edition und Copyright Alexander Reibisch

Keine Garantie auf Verfügbarkeit, Sicherheit, Unveränderlichkeit, Datenintegrität oder
Vermeidung von rechtlichen Eigentums- oder anderen Risiken.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Ziele	1
1.3 Organisatorische Struktur	1
2. Die Grundlagen der Unternehmenspolitik	1
2.1 Was ist eine Unternehmenspolitik?	1
2.2 Die Unternehmensstrategie	1
2.3 Ziele und Mission	1
2.4 Strategieentwicklung und -umsetzung	1
2.5 Erfolgsfaktoren in der Unternehmenspolitik	1
3. Marketing	1
3.1 Einführung	1
3.2 Die Marketingfunktionen	1
3.3 Unternehmensinterne Marketing	1
3.4 Marketingstrategie	1
3.5 Die Marketingmix	1
4. Strategische Unternehmensentwicklung und -planung	1
4.1 Prozess der Unternehmensentwicklung durch Geschäftsplan	1
4.2 Unternehmensziele und -planung	1
4.3 Ziele in der Unternehmensentwicklung	1
4.4 Unternehmensziele	1
4.5 Planung in der Unternehmensentwicklung und -planung	1
4.6 Unternehmensentwicklung in strategischer Hinsicht	1
4.7 Planung in der Unternehmensentwicklung	1
4.8 Unternehmensziele	1
4.9 Unternehmensentwicklung	1
4.10 Unternehmensziele und -planung	1
5. Marketing, Werbung und Public Relations	1
5.1 Grundlagen	1
5.2 Marketing	1
5.3 Grundlagen der Unternehmensentwicklung	1
5.4 Ziele der Marketing	1
6. Werbung und Public Relations	1
6.1 Werbung	1
6.2 Werbefunktionen und -planung	1
6.3 Werbemittel	1
6.4 Werbung	1
6.5 Werbung	1
6.6 Werbemittel	1

9. Appendix	126
9.1 Die optische Abbildung	126
9.2 Die inhomogene Wellenfeldgleichung und das Strahlungsgesetz	127
9.3 Signal und Rauschen	128
9.4	129

10.1	130	130
10.2	131	131
10.3	132	132
10.4	133	133
10.5	134	134
10.6	135	135
10.7	136	136
10.8	137	137
10.9	138	138
10.10	139	139
10.11	140	140
10.12	141	141
10.13	142	142
10.14	143	143
10.15	144	144
10.16	145	145
10.17	146	146
10.18	147	147
10.19	148	148
10.20	149	149
10.21	150	150
10.22	151	151
10.23	152	152
10.24	153	153
10.25	154	154
10.26	155	155
10.27	156	156
10.28	157	157
10.29	158	158
10.30	159	159
10.31	160	160
10.32	161	161
10.33	162	162
10.34	163	163
10.35	164	164
10.36	165	165
10.37	166	166
10.38	167	167
10.39	168	168
10.40	169	169
10.41	170	170
10.42	171	171
10.43	172	172
10.44	173	173
10.45	174	174
10.46	175	175
10.47	176	176
10.48	177	177
10.49	178	178
10.50	179	179
10.51	180	180
10.52	181	181
10.53	182	182
10.54	183	183
10.55	184	184
10.56	185	185
10.57	186	186
10.58	187	187
10.59	188	188
10.60	189	189
10.61	190	190
10.62	191	191
10.63	192	192
10.64	193	193
10.65	194	194
10.66	195	195
10.67	196	196
10.68	197	197
10.69	198	198
10.70	199	199
10.71	200	200
10.72	201	201
10.73	202	202
10.74	203	203
10.75	204	204
10.76	205	205
10.77	206	206
10.78	207	207
10.79	208	208
10.80	209	209
10.81	210	210
10.82	211	211
10.83	212	212
10.84	213	213
10.85	214	214
10.86	215	215
10.87	216	216
10.88	217	217
10.89	218	218
10.90	219	219
10.91	220	220
10.92	221	221
10.93	222	222
10.94	223	223
10.95	224	224
10.96	225	225
10.97	226	226
10.98	227	227
10.99	228	228
10.100	229	229

1. Einführung

1.1. Motivation

- Seit mehr als 1 Milliarde Jahre bestimmt Licht die Entwicklung aller lebenden Organismen auf der Erde. Die Mechanismen der Wechselwirkung zwischen Photonen und spezialisierten Molekülen innerhalb der Organismen sind jedoch immer noch Gegenstand aktueller Forschung.
- Licht ist ein hervorragender Träger von Informationen, da Licht sehr schnell ist, seine Frequetzgrade breitet und aus Photonen mit sehr kleiner Energie besteht, welche nicht mit anderen Photonen wechselwirken. Dadurch kann die Dichte des optischen Informationsstroms extrem hoch werden.
- Licht besteht aus Wellen. Das Verhalten der Lichtwellen wird unter anderem und entscheidend, je mehr wir in die Dimensionen der Nanowelt hineinbringen.
- Die Kontrolle von verschiedenen Eigenschaften des Lichts hat unser Alltagsleben stark beeinflusst – in der Unterhaltung, der Kommunikation, in der Kontrolle und Steuerung in Gesundheitswesen und Medizin, und, und,...
- Der jährliche Umsatz in Deutschland betrug 28 Mrd. Euro im Jahr 2012, was einem 20% igen Zuwachs gegenüber dem Vorjahr entspricht. Baden-Württemberg ist dabei mit einem Anteil von ca. 25 % der führenden Photonik-Regionen in Deutschland.
- In den Jahren 2002 – 2010 investiert alleine die Industrie mehr als 20 Milliarden Euro in die Forschung und Entwicklung der Photonik.

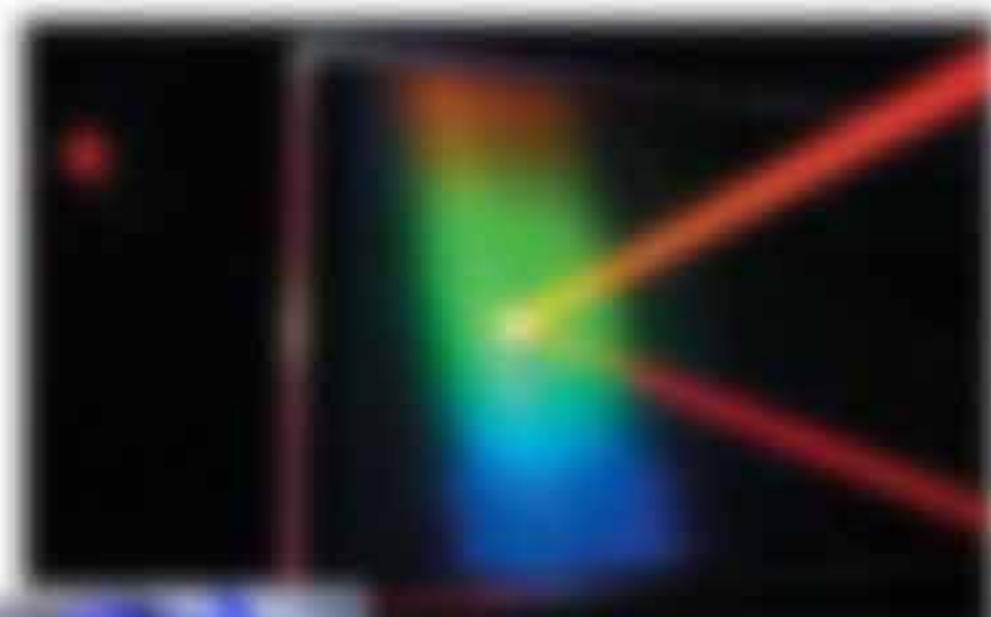
Interessante Links für lokal photonik Industrie:

www.optische-technologien.de/

www.photon2011.org/

www.photonics.de

www.photonik.de/



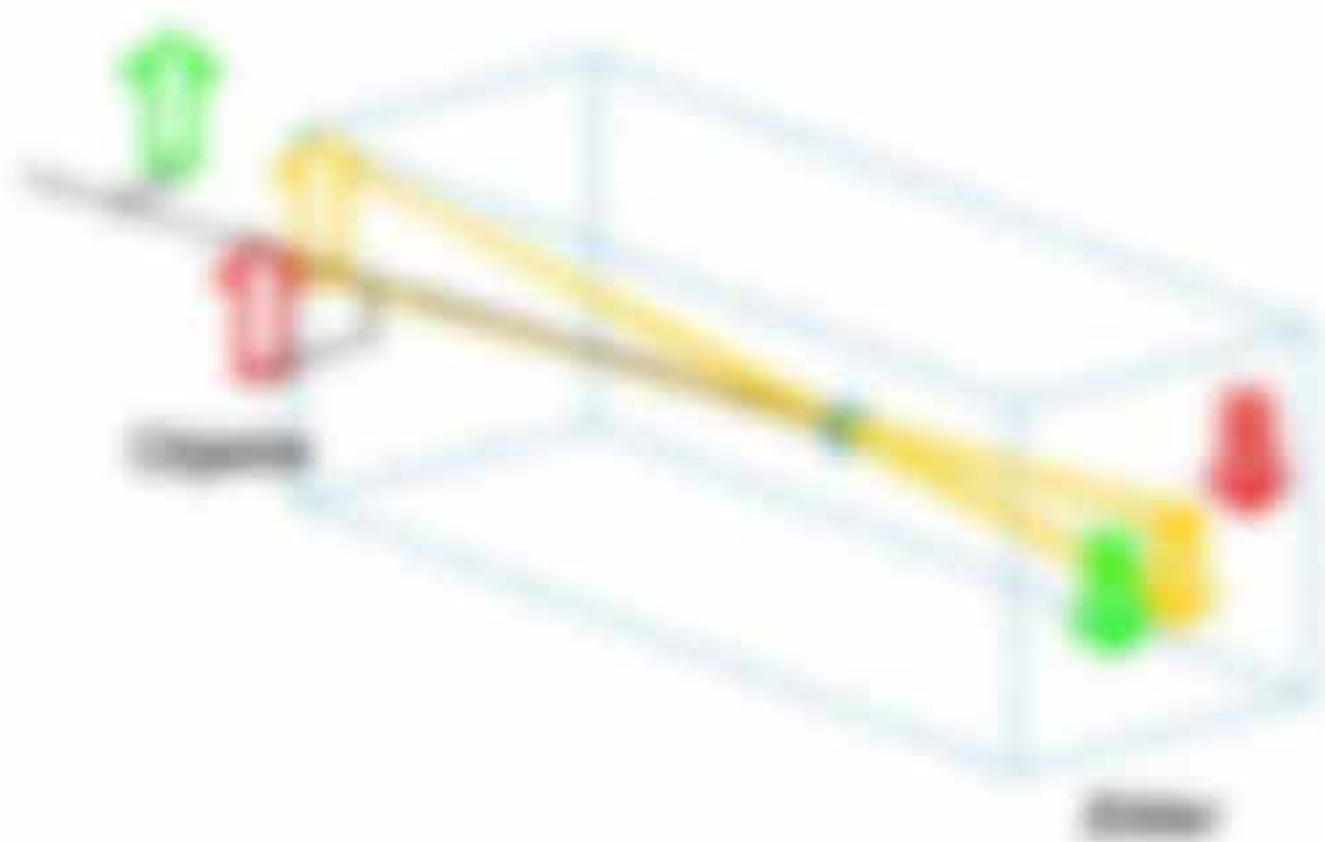
1.2. Literatur

- Hecht, E., Optik, Addison Wesley
- Demtröder, Experimentalphysik 2, Springer Verlag
- Saleh & Teich, Fundamentals of Photonics, Wiley & Sons
- Zehn, Optik, Oldenbourg
- Saleh, Optical Electronics, Wiley
- Goodman, J.W., Introduction to Fourier optics, McGraw-Hill

1.2. Historischer Abriss

Optik = „Jahre des Sehens, des Sichtbaren“

- 1279 Erste Brille (Alexander von Spina, Italien)
- 1608 Erfindung der Camera Obscura durch Da Vinci (Luftkammer erfindet 900 v. Chr.)



Erfindung: Vergrößerung durch große Verhältnisse zwischen den Linsen



- 1625/26 Linienfernrohr durch Hans Lippershey (NL) und Galileo Galilei
- um 1625 Mikroskop (Zaaij & Jansen, NL)
- 1627 Hermann Praepius der Luftvergrößerung (Hermann Jans)

Der Aufstieg der Wellenoptik

- 1666 Robert Hooke entdeckt farbige Interferenzmuster Beginn der Wellentheorie
- 1666 Isaac Newton untersucht Dispersion und Newton-Ring (Welleninterferenz), aber glaubt fest an die Korpuskulartheorie
- Ende 17. Jhd Christian Huygens beschreibt Wellenfrontausbreitung, Entdeckung der Doppelbrechung + Polarisation + Messung von c
- 1676 Ole Rømer schätzt $c = 2,3 \cdot 10^8$ m/s, aber $c = 3 \cdot 10^8$, durch zeitliches Erstarren des Jupitermondes Io ($d = 630$ Mio km)
- 1682 Interferenz erster Doppelspalt: Messung der roten und violetten Lichtwellenlänge durch Thomas Young
- 1801 August Fresnel verknüpft Wellenmechanik und Huygens: Math. Beschreibung von Ausbreitung und Beugung



Newton-Ring (1671)

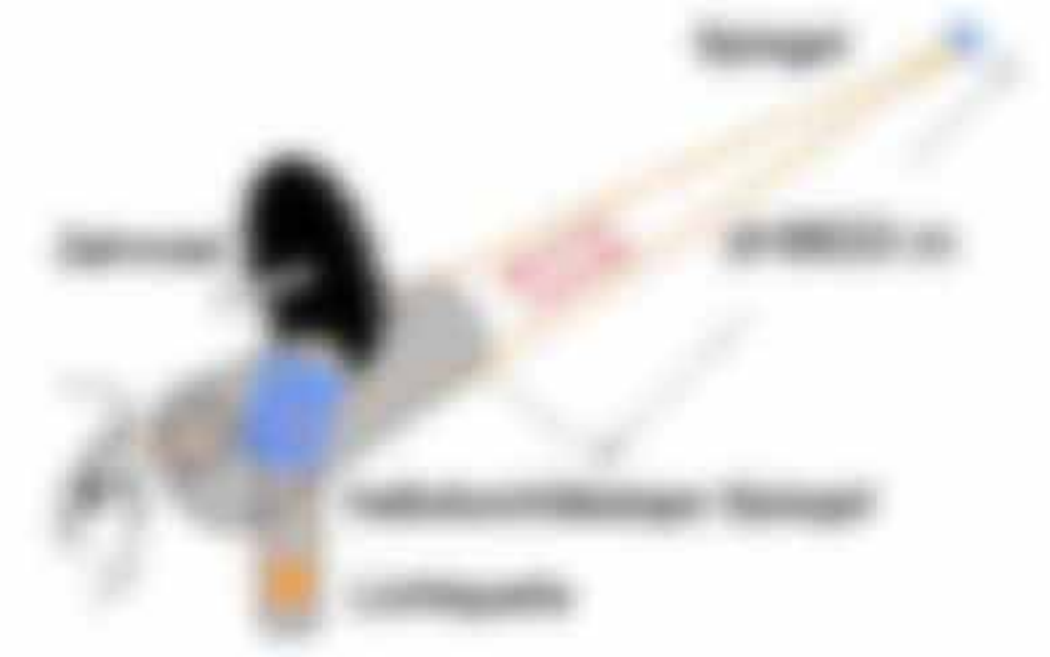


Isaac Newton (1643-1727)



Thomas Young (1773-1829)

- 1801 Fourier-Theorie - alle in harmonische Wellen zerlegbar
- 1806 Fresnel bestimmt v auf $3 \cdot 10^{10}$ m/s über Doppelspaltversuch (stehende Wellen) und beweist damit die Existenz der Lichtgeschwindigkeit
- 1867/74 Maxwell's Grundgleichungen, die Theorie der Verschiebungsladungen und damit elektromagnetische Wellen
- 1888 Verifikation elektromagnetischer Wellen durch Heinrich Hertz (Hertz-Dipolstrahlerradiationswellen)
- 1905 Planck (1918 Nobelpreis) Grundlegende Arbeiten über Quantenmechanik und Lichtenergie (= Lichtquanten/Photon)



Strahlung der Lichtgeschwindigkeit 1888

Die Licht- und Energie der Materie- und Quantenphysik: Wellen und Teilchen

- 18. Jhd. Hermann von Helmholtz (Elektrodynamik und Akustiktheorie) liefert grundlegende Beiträge zu Erhaltungssätzen und Energieerhaltung
- Robert Brown und Louis Pasteur zeigen über Teilchenbewegungen, dass alles aus kleinsten Atomen und Molekülen (aus verschiedenen Elementen) aufgebaut ist (Kinetische Theorie)
- 1827/1828 Michael & Moritz Crookes (Kathodenstrahl) zeigen erstmals, dass Licht Materie als Trägermedium für Licht?
- 1858 John Tyndall: Neue Form der Kinetiktheorie (Energieerhaltung mit Licht) abgeleitet aus Schwingungserklärung über geladene Teilchen (Kinetiktheorie) erregt bei großen Frequenzen $v \rightarrow c$ (Lichttheorie)
- 1859 Gustav Kirchhofftheorie, aber auch Plancksche Lichttheorie (Maxwell)
- 1869 Louis-Victor de Broglie: Wellenlängentheorie gilt es auch für Teilchen mit Masse (Materiewellen) Basis für DeBroglie-Wellenlänge
- 1905 Albert Einstein - Quantentheorie (Photonen-Energie) als Basis für neue Lichttheorie



Louis-Victor de Broglie (1892-1960)

\vec{I} ist die Integrationskurve des Vektorpotentials (Kontur, Kurve, Ring, Film, etc.) Integration über die Querschnittsfläche A und über die Zeitdauer T ergibt die elektrische Energie $W = \int_V \int_T \vec{j} \cdot \vec{A} dt dV$ in J

Die Transportgeschwindigkeit der elektrischen Energie und damit von Informationen ist auf die Lichtgeschwindigkeit beschränkt, welche durch Naturkonstanten definiert ist, z.B. ist

$$\frac{dW}{dt} = c^2 \cdot \frac{dQ}{dt} \quad \text{in Voltmeter bzw. } \frac{dW}{dt} = c^2 \cdot \frac{dQ}{dt} \quad \text{in Voltmeter (2.2)}$$

wobei $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ km/s}$. Weiterhin wurden folgende Materialgrößen verwendet:

- die elektrische Permittivität $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$
mit relativer Permittivität ϵ_r und Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Vm}$
- die magnetische Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
mit relativer Permeabilität μ_r und Permeabilitätskonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}^2/\text{Am}$

Photonen und Strahlungsdruck

Eine Lichtquelle hat die Strahlungsleistung $P = \vec{S} \cdot \vec{A}$ in Watt bzw. eine Bestrahlungsstärke („Intensität“) $\vec{I} = P/A$ als Strahlungsleistung pro Fläche A .



Der Photonenfluss pro Fläche über einen

$$\text{Strahlungsdruck } \vec{p} = \vec{I} \cdot \vec{A}$$

von einer optischen Kraft $\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{A}$,

auf die absorbierende Fläche A aus vorher Versuchsapparatur mit Strahlungsquelle

Die optische Kraft lässt sich genauer beschreiben aus der elektromagnetischen Kraft \vec{F} , welche aus der elektromagnetischen Kraft $\vec{p} \cdot \vec{A}$ und der Lorentzkraft $\vec{p} \cdot \vec{v} = \vec{F}$ besteht und auf eine Ladung q wirkt,

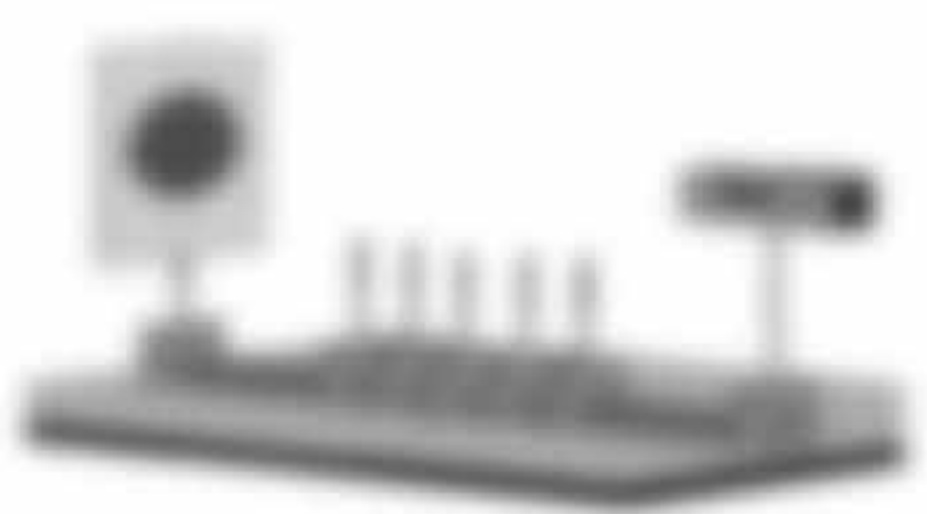
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

Photonenfluss in Photonen pro sec bei optischer Leistung $P = \frac{P}{h \cdot \nu} = \frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$ (2.4)

wobei für sichtbares Licht gilt $h \cdot \nu = h \cdot c / \lambda = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ bei $\lambda = 400 \text{ nm}$

Auf einer 2cm großen Pupille treffen 1 Photonen:

- rottes Licht (200 nm) $E = 10^{-18} \text{ J}$
- rottes Sonnenlicht $E = 10^{-19} \text{ J}$
- Blauviolettes $E = 10^{-18} \text{ J}$
- Blauviolettes $E = 10^{-19} \text{ J}$
- Sonnenschein $E = 10^{-19} \text{ J}$



• **Stromerhaltung:** Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$

mit dem Ladungs-, Flächen- und Volumenstrom ρ , $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ und $\dot{\rho}$

Maxwell-Gleichung: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ (2.1)

mit $\rho =$ Ladungsdichte, $\mathbf{j} =$ Ladungsstrom, $\mathbf{E} =$ Elektrisches Feld

Maxwell-Gleichung: $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ (2.2)

Bedeutung: Die Geschwindigkeit des Transports einer Ladungsgewichte (Ladung) ist hier die zeitliche Änderung einer Ladungsdichte („von Quelle einer Fluss“)

Maxwell-Gleichungen

in integraler Form

- 1. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int \rho \, dV$
- 2. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int \rho \, dV - \dot{\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}}$
- 3. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV$
- 4. $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$

in differentieller Form

- 1. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$
- 2. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho - \mu_0 \dot{\mathbf{j}}$
- 3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$
- 4. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

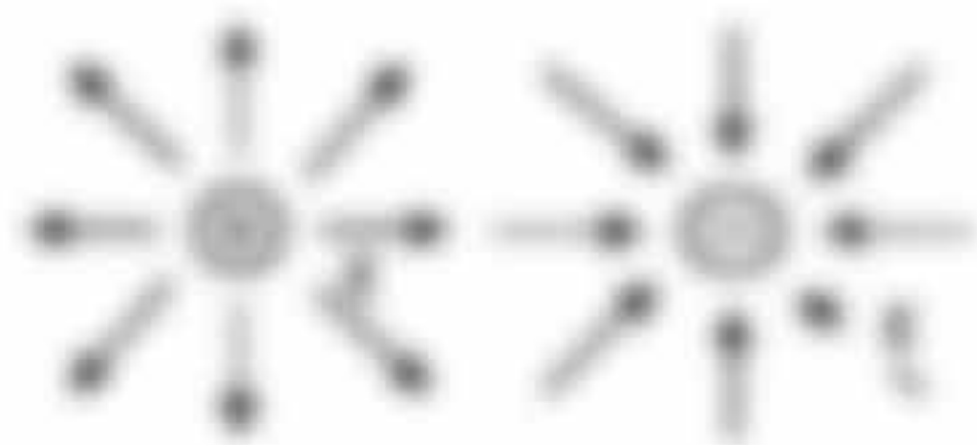
Die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$ stellt ein lokales Erhaltungsgesetz dar (Erhaltung der Ladung) und ist eine lokale Form der Kontinuitätsgleichung $\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \dot{\int \rho \, dV} = 0$.

Die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0$ (Ladungserhaltung) wird durch Maxwell aus den Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ und $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ abgeleitet, wenn man sich selbst ein lokales Erhaltungsgesetz $\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \dot{\int \rho \, dV} = 0$ überlegt.



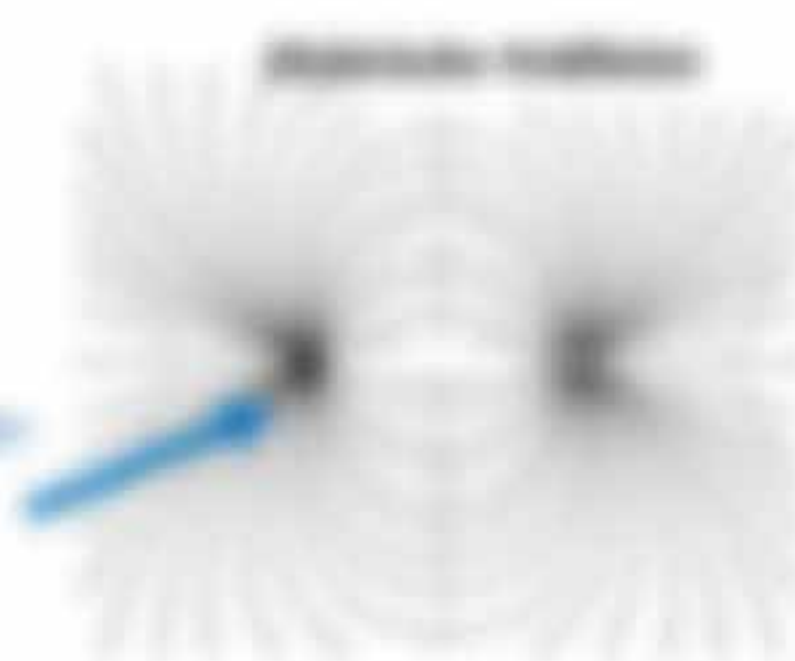
Abbildung 2: Erhaltung der Ladung in einem geschlossenen Volumen

Zu 10) 8 Pfeile haben keine Quellen oder Senken



Zu 11) Ladungen $\pm q$ sind Quellen oder Senken von elektrischen Feldlinien

Feld eines Dipols



Richtung Feld und Energiefluss
Richtung von Ladungen



Wenn die Ladungen ausfallen, folgen die Feldlinien der Ladungen der Ladungen und die Dipole emittiert elektromagnetische Strahlung



Strahlungsmuster einer Dipolantenne. Die Feldlinien sind durch die Ladungen und die Dipole emittiert

Siehe Dipol Animation www.licht.de/faq/wave.htm für Vektorpotenzial

2.8. Licht in Materie

2.8.1. Die Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen sind mathematisch in Form von vier Gleichungen beschrieben durch die elektrische und magnetische Felder \vec{E} und \vec{B} , welche man auch in Materie beschreiben kann.



Strahlung in Materie über Maxwell

Die Maxwellgleichungen werden durch die Materieigenschaften verändert und ergänzt

Fällt eine Lichtwelle auf Materie, so stellt man im Wesentlichen 2 Effekte fest:

- a) elektromagnetische Felder ändern sich in der Materie und
- b) Materie zeigt eine Reaktion (hier nur die lineare Antwort)



Man addiert das einfallende Feld und die lineare Antwort der Materie:

a) Polarisation \vec{P} und dielektrische Verschiebung \vec{D}

Summe der Felder ergibt $\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ wobei $\epsilon_0 = \epsilon_0(\omega)$ und

$$\vec{D} = \epsilon_0(\omega) \vec{E} + \vec{P}(\omega) = \epsilon_0(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (2.10)$$

→ die Abhängigkeit von ω bei \vec{P} bzw. ϵ_0 nennt man Dispersion

b) Magnetisierung \vec{M} und magnetische Induktion \vec{H}

Summe der Felder ergibt $\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{M} = \vec{H}$ wobei $\epsilon_0 = \epsilon_0(\omega)$

$$\vec{H} = \epsilon_0(\omega) \vec{E}(\omega) + \vec{M}(\omega) = \epsilon_0(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (2.11)$$

c) Brechungsindex n

Er ergibt sich aus der Maxwellgleichung Formel (2.10) und Formel (2.11)

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_0(\omega) \mu_0(\omega)} = \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)} \quad (2.12)$$

bei $\omega = 0$ betrachten Frequenzen $\omega = 0$ (DC)

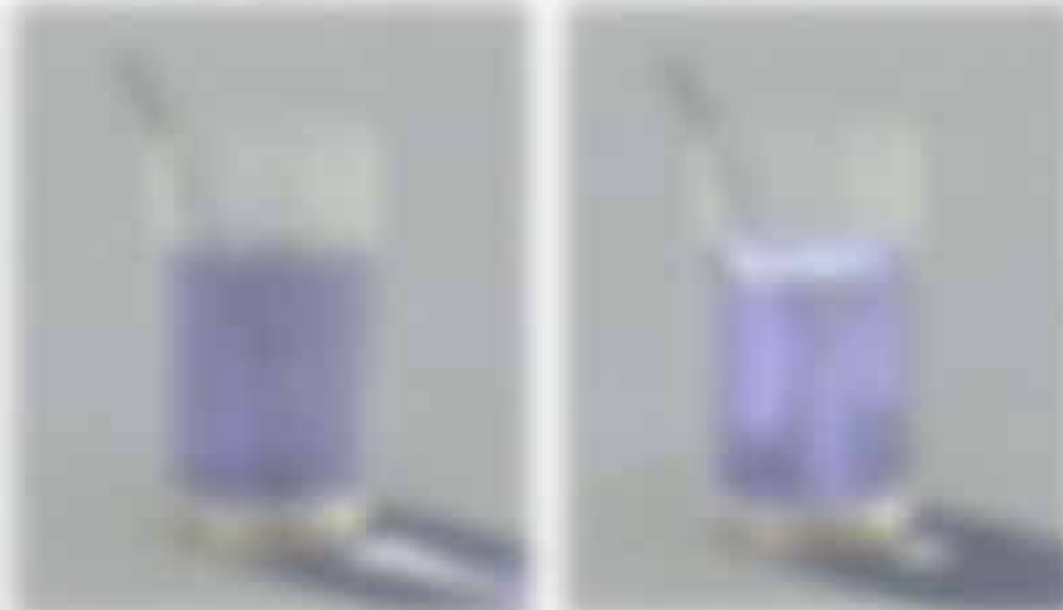
Reelles Material: ϵ_0, μ_0 und ϵ_r, μ_r keine Materie mehr, sondern Vakuum (z.B. bei Frequenz 0)

Dispersives Material: bei $\omega > 0$ ist $\epsilon_r(\omega)$ komplex und wird in $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)$ zerlegt. $\epsilon_r''(\omega)$ beschreibt die Absorption bzw. Dämpfung des Lichts. Die Abhängigkeit zwischen $\epsilon_r'(\omega)$ und $\epsilon_r''(\omega)$ ist durch die Kramers-Kronig-Relationen bestimmt. Man schreibt:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega) \quad (2.13)$$

→ absorbierendes Material $\epsilon_r'' > 0$ gerades ϵ_r' und ϵ_r'' fällt um π außer Phase

Man kann bei ω gerader optischer Wellenlänge mit der ersten Dispersionsebene $\epsilon_r'(\omega)$ in $\epsilon_r''(\omega)$ in Materie „auslesen“! Man spürt eine Magnetisierung bei optischer Frequenz nicht, das Licht ω einer optischen Wellenlänge $\omega_{opt} = 2\pi \nu_{opt} = 2\pi c/\lambda_{opt}$ (wobei ν_{opt} die optische Frequenz und λ_{opt} die optische Wellenlänge ist) wird durch $\epsilon_r'(\omega)$ bestimmt.



Dielektrizitätszahl mit Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 , kann dem äußeren Feld $E(t)$ mit Frequenz ω nur bedingt folgen. Man nimmt für die Dielektrizitätszahl $\epsilon(\omega)$ ein Polmodell an mit Polfrequenzen $\omega = \omega_1, \omega_2$ ($\omega_1 = 5 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ für Dielektrizitätszahl für die sichtbare Strahlung)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{f_1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{f_2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (2.18)$$

Die Lösung der DGL dieser gedämpften, getriebenen Oszillatoren liefert $\epsilon_1(\omega) = \text{Re}(\epsilon(\omega))$, also die frequenzabhängige Ausbreitung $n(\omega)$ der Lichtung y welche zum Fernfeld gehört

(2.19)

Mit einer Phasenverschiebung $\delta = \pi/2$ zwischen Erregungswerte E und Dipolmoment p

$$\text{Wirkleistung} = \frac{1}{2} \frac{E_0 p_0 \sin \delta}{\omega} \quad (2.20)$$

mit $p = \epsilon_0 \epsilon(\omega) E$ bei $\omega = \omega_1$ Resonanz (siehe Ableitung 7)

Man definiert nun die Polarisation P als Dipolmomentdichte p/V mit

$$P(\omega) = \epsilon_0 (\epsilon(\omega) - 1) E(\omega) = \frac{N \langle p \rangle}{V} = \frac{N \epsilon_0 \epsilon(\omega) E(\omega)}{V}$$

Mit der Ausbreitung $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$,

bedeutet (2.18) weiter nach dem

$$P(\omega) = \epsilon_0 (\epsilon(\omega) - 1) E(\omega) = \epsilon_0 (n^2(\omega) - 1) E(\omega)$$

erfolgt $n^2(\omega) = 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$

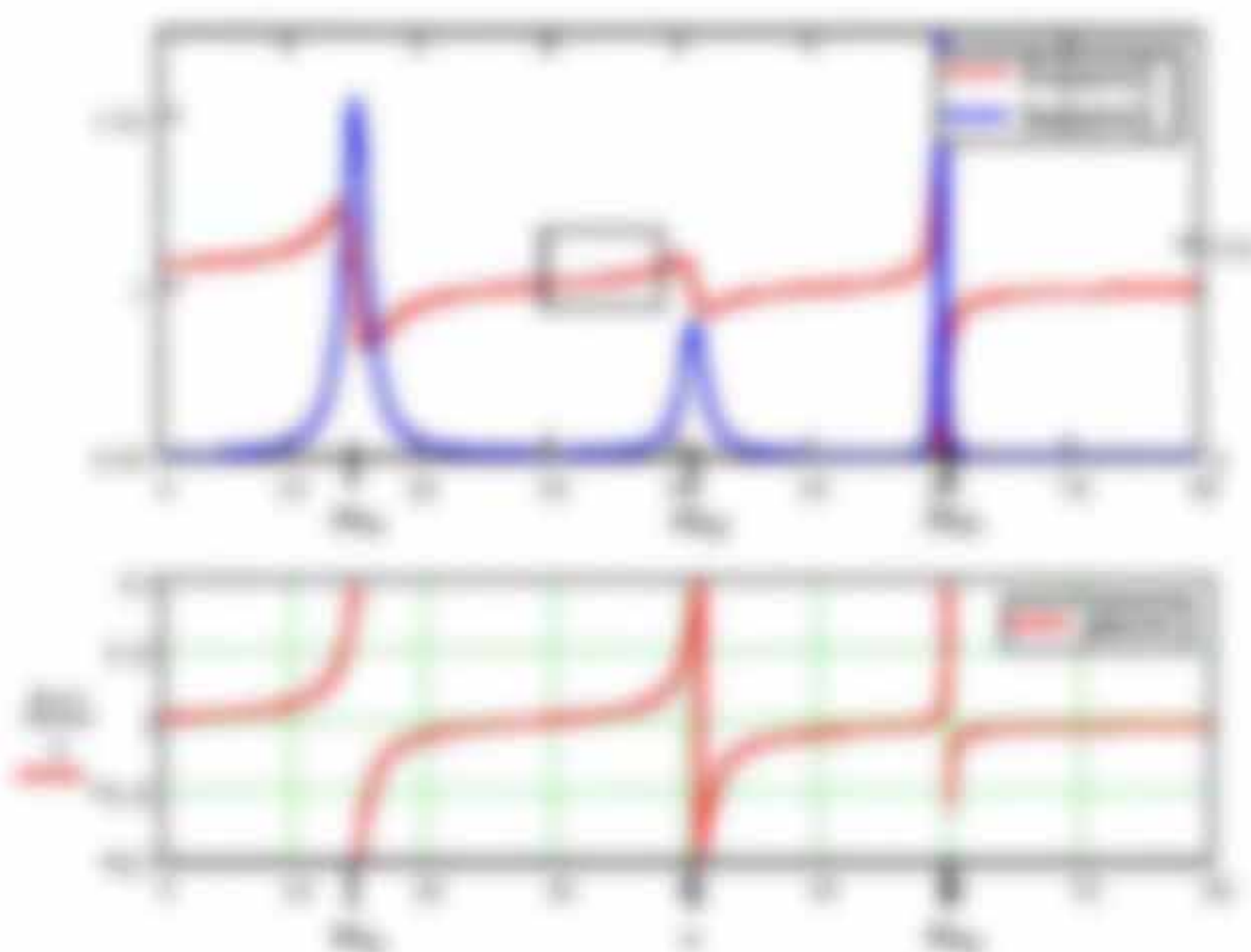
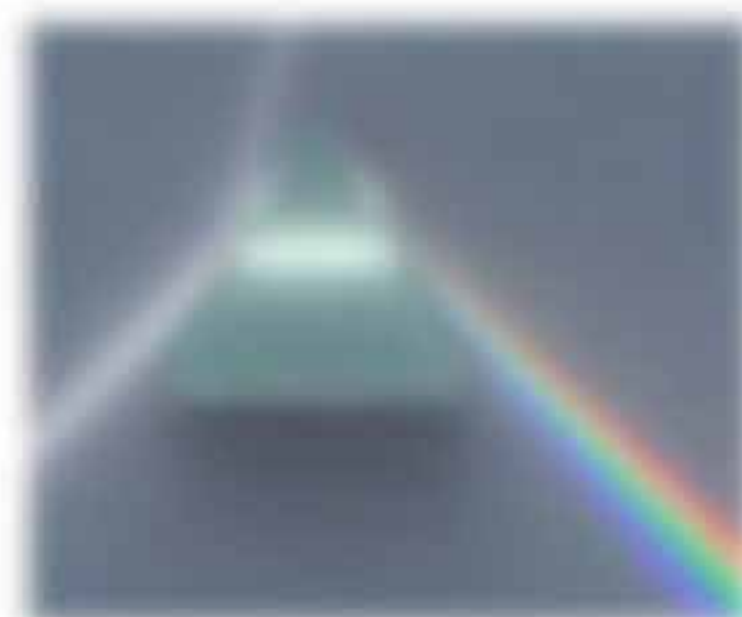


Abbildung 7: Dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$ und die zugehörige Ausbreitung $n(\omega)$ für ein dielektrisches Material mit zwei Polfrequenzen ω_1 und ω_2 . Die reelle Teil $\epsilon_1(\omega)$ zeigt die Dispersion der Brechzahl, die imaginäre Teil $\epsilon_2(\omega)$ zeigt die Absorption. Die Dispersion $n(\omega)$ ist durch die reelle Teil $\epsilon_1(\omega)$ gegeben, die Absorption $k(\omega)$ durch die imaginäre Teil $\epsilon_2(\omega)$. Die Dispersion $n(\omega)$ ist durch die reelle Teil $\epsilon_1(\omega)$ gegeben, die Absorption $k(\omega)$ durch die imaginäre Teil $\epsilon_2(\omega)$.

Quelle: [1], S. 100

Eingetragen kann auch die Dichtenzahlzahl $\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)$ benutzt sein. Die Umrechnung von komplexen Brechungsindizes lautet:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}} \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \quad (2.26)$$

$$\text{bzw. } \rho_1 = n_1^2 - k_1^2 \quad \text{und} \quad \rho_2 = 2 n_1 k_1$$

Aufgabe 8: Sie sollten die Verluste der reflektierten Welle an einer Grenzfläche und in bei guten elektrischen Leitern (Metalle) von einer reellen Leitwertnäherung her ableiten:

$$R_{ref} = \frac{1}{1} + \frac{2 \operatorname{Re}\{\gamma\}}{\operatorname{Re}\{\gamma\}} \left(\frac{\operatorname{Re}\{\gamma\}^2 - \operatorname{Im}\{\gamma\}^2}{\operatorname{Re}\{\gamma\}^2 + \operatorname{Im}\{\gamma\}^2} \right) \quad (2.27)$$

Dies ist gerade bei Stromfluss und höher über den verlustlosen Bereich hinaus, wobei es für Frequenzen gut geeignet ist (siehe Abbildung 8).

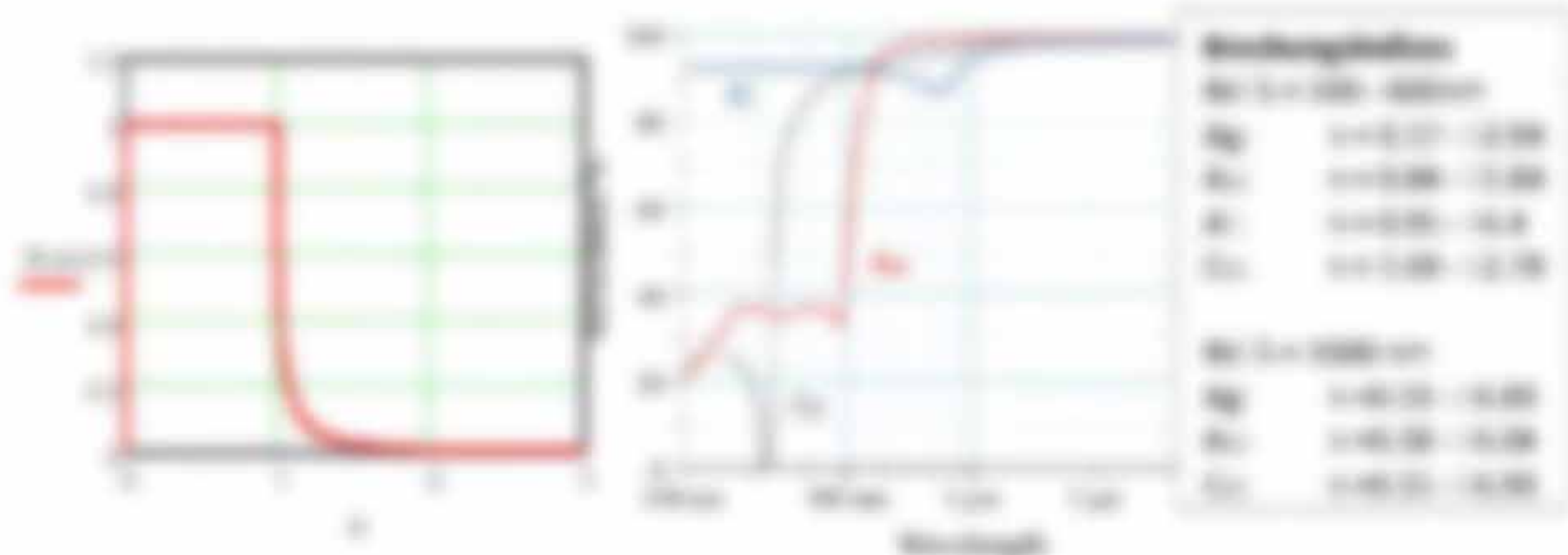


Abbildung 8: Reflexionskoeffizienten R_{ref} für verschiedene Frequenzen mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Die Kurven zeigen die Reflexion von Stromfluss, wobei die Kurve für gute elektrische Leiter bei hohen Frequenzen einen Wert von $R_{ref} = 1$ erreicht.

2.4. Wellengleichung und Helmholtzgleichung

2.4.1. Wellengleichung

Aus der 1. und 2. Maxwellgleichung lässt sich die Telegraphengleichung ableiten (siehe Kapitel 2.4.2). Für verlustfreie (verlustfrei, $\sigma=0$) und leitungslos ($\epsilon=0$) Medien ergibt sich die Wellengleichung für das E -Feld (E -Feld entsprechend) in homogenen, isotropen Medien zu

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

Das in isotropen Medien mit linearer Antwort $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$ gilt $\Delta \mathbf{D} = \mu \epsilon \Delta \mathbf{E} = 0$ oder $\Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{P}$. Da \mathbf{P} sich anders zu \mathbf{E} nur in der Zeit bzw. Frequenz ändert

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \mu \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

erhält man $\mu \epsilon = \mu \epsilon_0 \epsilon_r$, $\epsilon_r = 1 + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}}$ und $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}} \right) = \epsilon_0 \epsilon_r$

Die Geschwindigkeit v der Felder im Medium mit Brechzahl n lautet

Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n}$ (2.22)

Es tritt hier im Nenner eine Geschwindigkeit $v_{\text{Licht}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$

Wichtigste Note zur Wellengleichung mit $n = 1,5$ (Luft) zeigt sich in Brechungsindex $n = 1,5$, es werden die Wellenlänge entlang der Flugrichtung des Lichts, korrigiert um Brechungsindexänderung und Brechungsindex mit einer Wellenlänge (Wellenlänge) $\lambda = \frac{c}{f}$ gilt es dann das Brechungsindex der Wellenlänge berechnen kann, was wird bei $n = 1,5$ die Wellenlänge mit Lichtwellenlänge λ_{Licht} ist dann mit Lichtwellenlänge λ_{Licht} $\lambda_{\text{Medium}} = \frac{\lambda_{\text{Licht}}}{n}$



2.4.2. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

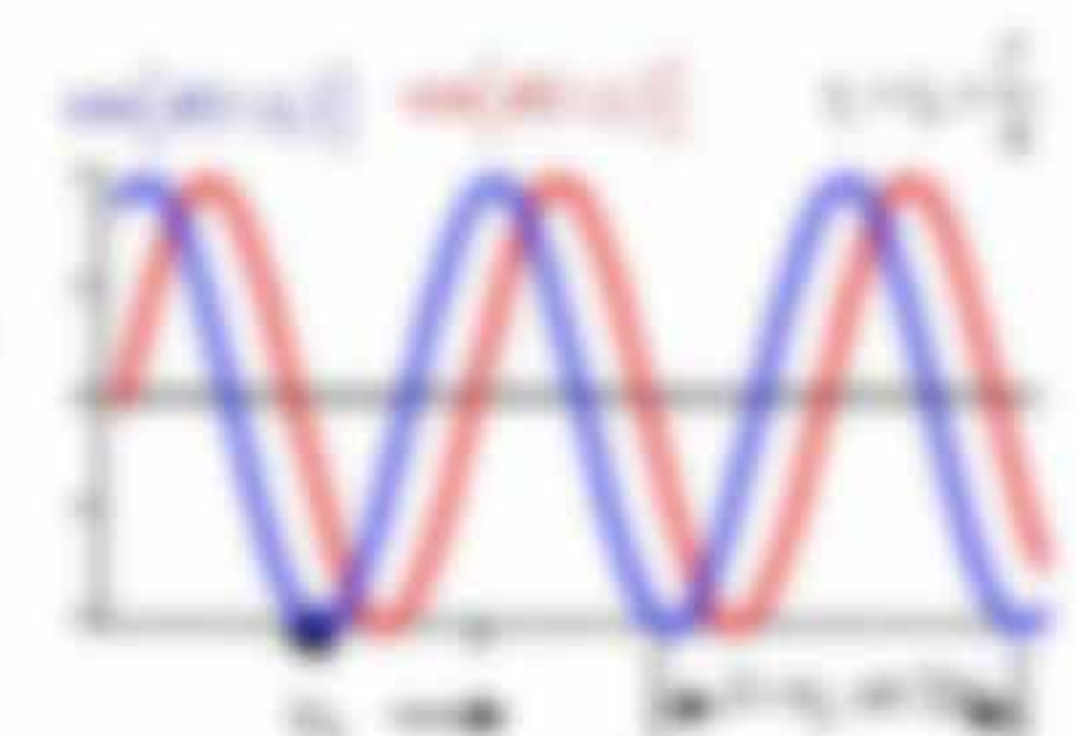
Die Wellengleichung wird z.B. gelöst durch diese zwei harmonische Wellen $e^{i(kx - \omega t)}$ in dem:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_1 e^{i(kx - \omega t)} + \mathbf{E}_2 e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.23)$$

erhält man $v^2 = \omega^2 / k^2 = c^2 / n^2$ (Dispersionsformel)

$\omega(k) = v(k) \cdot k = \omega(k)$ und $v^2(k) = \omega^2(k) / k^2(k)$ bzw.

$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{n}$ (Phase der Wellen)



Beispiel zur Wellengleichung mit zwei Phasengeschwindigkeiten.



mit Anfangswerten $g_1 = g_1(x=0) = 0$ und $g_2 = g_2(x=0) = g_2(x) = v \cdot \Delta t$, mit Δt .

Die Flusslage eines Punktes der Stelle $p = (t, \Delta t)$ ändert sich über den Δt und über die Zeit durch $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$. Der Punkt (siehe Abbildung) bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_1 und verliert mit $v \cdot \Delta t = v_1 \cdot \Delta t = \Delta x$ an.

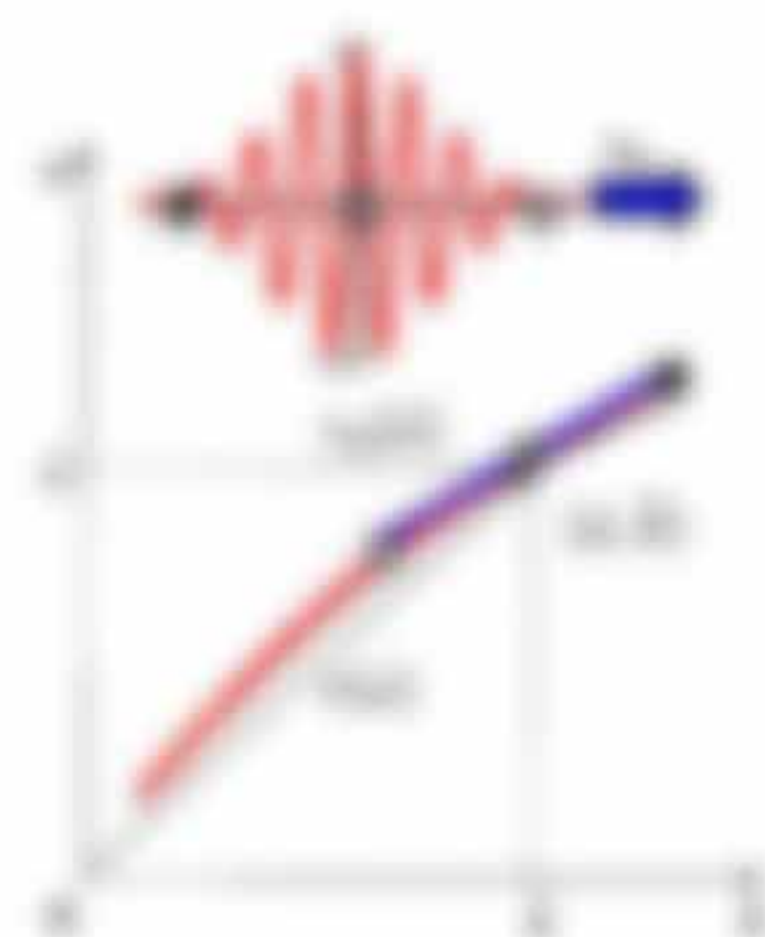
Die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{v}{1} = \frac{v}{k + i} = \frac{v}{k} = v_1$$

(0,20)

betrachtet die zeitliche Änderung des Δt einer konstanten Wellenlänge, die der linearen Dispersion $v = v(\omega)$ mit $v = v \cdot \Delta t$ im Vakuum $v = c$ folgt.

In dispersiven Medien mit $v < c$ verhält sich v nicht $v = c$, da auch die Richtung über die Phasengeschwindigkeit $v_1 = v \cdot \Delta t$ ändert. Somit ist $v_1 = v$ möglich? (siehe gilt für die Gruppengeschwindigkeit mit $v_1 = v$).



Die Gruppengeschwindigkeit $v_2(\omega) = v_2(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$ ist die mittlere Geschwindigkeit eines Wellenpakets bei einem Schrittlänge mit mittlerer Frequenz ω .

$$v_2 = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v \cdot \omega}{\omega} = v$$

(0,20)

Wichtig ist, dass die Gruppengeschwindigkeit v_2 in Medien mit dispersiven Medien aus der Phase $\omega = \omega(k)$ berechnet werden kann. In der Phasengeschwindigkeit v_1 ist $v_1 = v$ konstant.

3.4.2 Membrangleichung

Wenn nur die Membran horizontal (nur nur einer Teil) mit einer festen Frequenz $\omega = \omega_0$ (mit $\lambda = \lambda_0$ und $f = f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$)

Das Feld $\Phi(x, t) = \Phi(x) \cdot e^{i\omega t}$ ist auch 2-malige Lösung $\Phi(x, t) = \Phi(x) \cdot e^{i\omega t} = \Phi(x)$.

Ersetzen von $\Phi(x, t) = \Phi(x)$ liefert die Helmholtz-Gleichung (inhomogen)

$$(\Delta \Phi(x) + k^2 \Phi(x) = 0)$$

(0,20)

mit $k^2 = \omega^2 / v^2 = (\omega_0 / v)^2 = k_0^2 = k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{v^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{(2\pi \cdot \Delta t)^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \Delta t^2}$

Die Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2) \Phi(x, y, z) = 0$ ist eine lineare DGL, und daher sind die Lösungen auch linear kombinierbar. Die einfachste Lösung ist eine ebene Welle. Es ist

$$\Phi(x) = \Phi_0 \cdot e^{i k x} = \Phi_0 \cdot e^{i 2\pi x / \lambda_0} \quad \text{mit} \quad \nabla^2 \Phi(x) = -k^2 \Phi(x) = -k^2 \Phi(x)$$

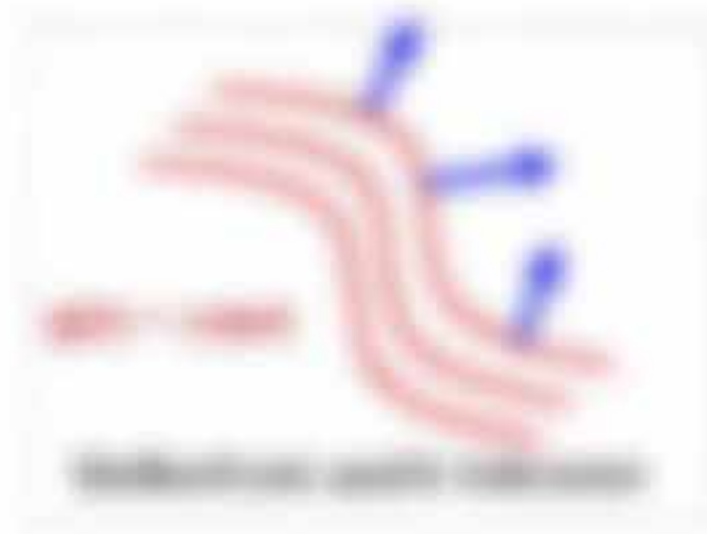
2.8.1 Wellenvektor und Wellenfrequenz

Der Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ beschreibt die Ausbreitungsrichtung und den Impulsstrom der ebenelementaren Wellen. k stellt im Folgenden stets die Größe $|\vec{k}|$ dar.



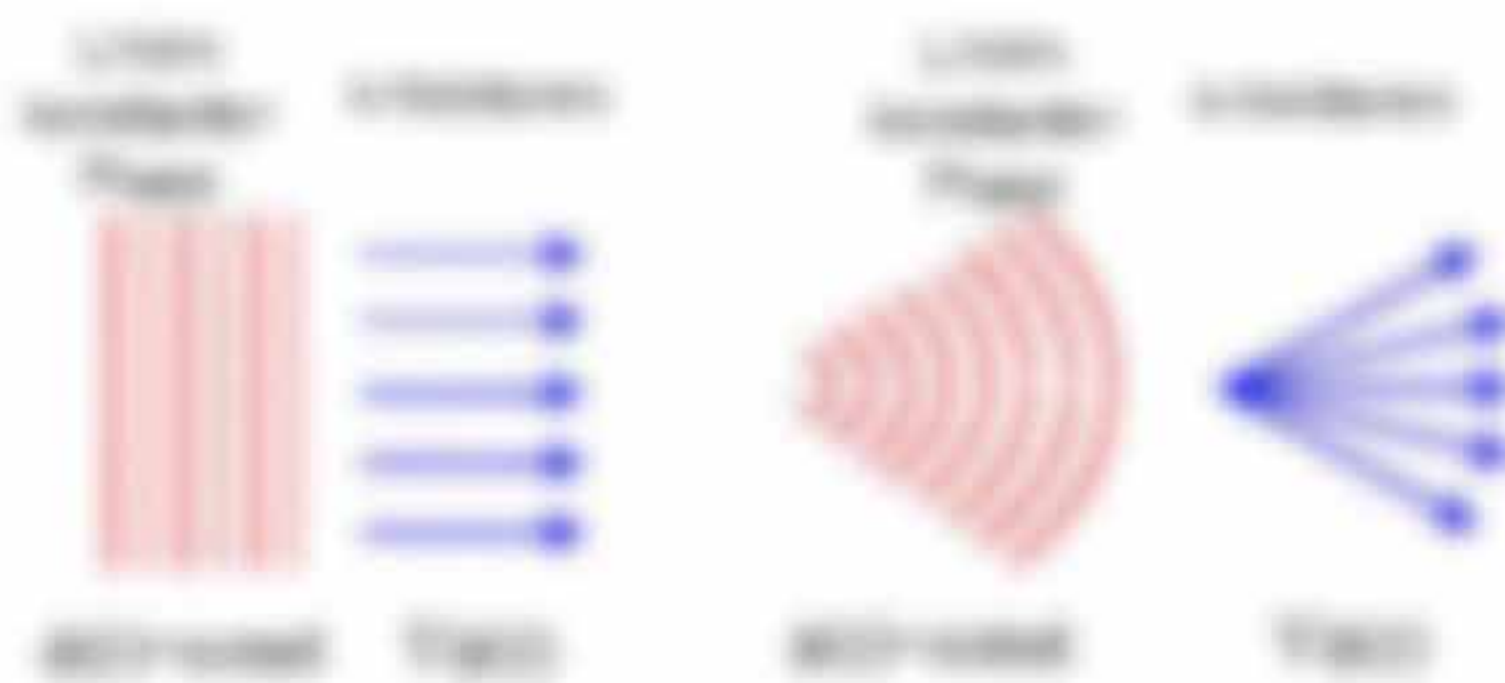
Die Wellenzahl oder optische Frequenz bzw. Raumfrequenz

$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ beschreibt die Anzahl der Schwingungen des Feldes pro Länge. Bei $\lambda = 1 \mu\text{m}$ wären dies $2 \cdot 10^6$ pro Meter, also $k = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.



Der Wellenvektor steht senkrecht auf der Wellenfront. Die Phase einer ebenelementaren Phase ist $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$.

Es gilt $\nabla \varphi = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi) = \vec{k}$ (2.86)



Beispiel: In einer Phasefront senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gilt $\partial_x \varphi = \partial_y \varphi = \partial_z \varphi = 0$, es ist die Normalkomponente $k_x = (k_x, 0, 0) = \vec{k}$. Bei $\omega = 2\pi \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ist $k_x = 2\pi \cdot 10^{14} / (3 \cdot 10^8) = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.

Der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ist meist senkrecht zum Impulsvektor. \vec{S} beschreibt zum Teil den Transport der Energie \vec{S} der Wellen mit Lichtgeschwindigkeit c , so dass $\vec{S} = \vec{k} \cdot \frac{c}{k} = c \vec{k}$. \vec{S} ist im freien Raum parallel zu \vec{k} .

Für die Wellenlänge gilt $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_k$ mit $\lambda = 2\pi c / \omega = 2\pi / \nu$.

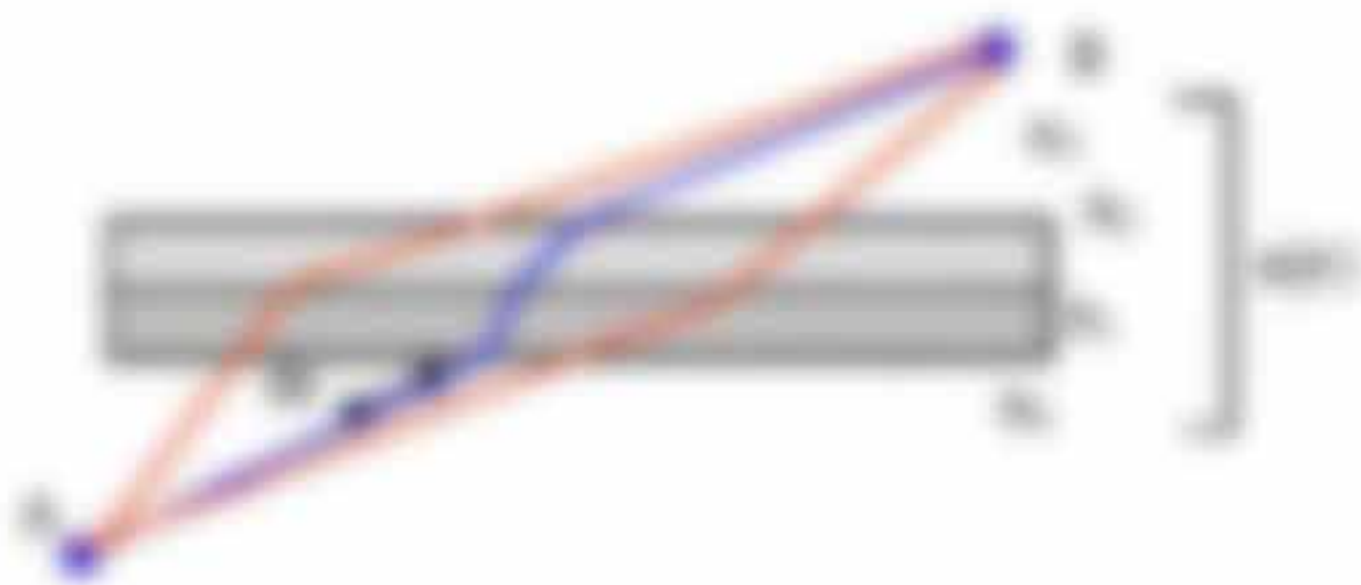
Der Übergang von der Wellenlänge zur Wellenzahl geht über die Maxwell-Gleichung weiter. Man geht von der Änderung der Lichtphase aus, also die Änderung des optischen Weges Δs proportional zum Betrag der Wellenzahl aus. In der Wellengleichung in isotropen Medien (2.85) ist der Strahl \vec{g} nach einer Richtungsänderung um θ durch \vec{k} ersetzt, entsprechend dem dem Fermat'schen Prinzip, wie im Folgenden gezeigt.

Prinzip von Fermat

Der unabhängige Brechungsindex wird bestimmt durch die optische Weglänge Δs mit $\Delta s = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} n(\vec{r}) d\vec{r}$ den Strahlverlauf von \vec{A} nach \vec{B} , indem man Wegpunkte \vec{r} mit $\vec{r} = (x, y, z)$

gewählter Zusammenhang

$$c(n) = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{c_0} \frac{dc_0}{dt} \right) c_0$$



Wird geht über den kürzesten optischen Weg (Weg) von A nach B, beobachtete Wege sind interferieren sich weg. Die Frage veränderter Brechungsindex Wert sich über sich beschreiben. Die Brechungsindex der optischen Weglänge wird ausgedrückt durch

Formale Prinzip

$$\frac{d}{dt} c(n) - \frac{d}{dt} c_0 = 0$$

(2.26)

Wird geht über den Weg, der die kürzeste Zeit braucht, beobachtete Wege interferieren sich weg weg. (Wellenlänge von A. Nummer zur Beschreibung der Quasiverbreitung)

Das Formale Prinzip lassen sich die Gesetze von Reflexion und Brechung ableiten!

Dies funktioniert auch für kontinuierliche Brechungsindexänderungen. (weg. Diffusion, Spreitung auf heller Strahl („Fokussierung“), Licht der untergehenden Sonne, etc.)

2.4.5. Gedämpfte Wellen

Eine Welle im Medium mit komplexem Brechungsindex $\hat{\epsilon} = \epsilon_0(\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2) = \epsilon_0(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$

hat einen komplexen Wellenvektor

$$\hat{k} = k_1 + ik_2 = k_0(\epsilon_1 + i\epsilon_2)^{1/2}$$

(2.27)

mit dem dimensionslosen Absorptionskoeffizienten $\alpha = \epsilon_2$. Dann beachte hier die alternative, oft verwendete Schreibweise: Die gedämpfte ebene Welle lautet dann

$$E(x, z) = E_0 e^{ik_1 x - i\omega t} e^{-k_2 z} = E_0 e^{ik_1 x - i\omega t} e^{-\frac{\alpha}{2} z} e^{-k_1 z}$$

und es ist dem Lambert-Beer-Gesetz für Absorption unterliegt

$$\begin{aligned} I(z) &= E_0^2 e^{-2k_2 z} = E_0^2 e^{-\alpha z} \\ &= I_0 e^{-\alpha z} = I_0 e^{-\frac{\alpha}{2} z} e^{-\frac{\alpha}{2} z} \end{aligned}$$

(2.28)

wobei $\hat{\epsilon} = \epsilon_0(\epsilon_1 + i\epsilon_2)$ die Dielectricitätskonstante ist und es gilt $\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{d\epsilon_0}{dz} = -\frac{\alpha}{2} z$.

Man beachte, dass der Absorptionskoeffizient $\alpha = 2k_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_0}$ die Dimension von z^{-1} hat.

Beispiel für eine exponentiell abklingende Welle mit Dämpfungsrate $\beta = 2/3$, wobei man $E(x,t) = E_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - \beta x) = E_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - \beta x)$

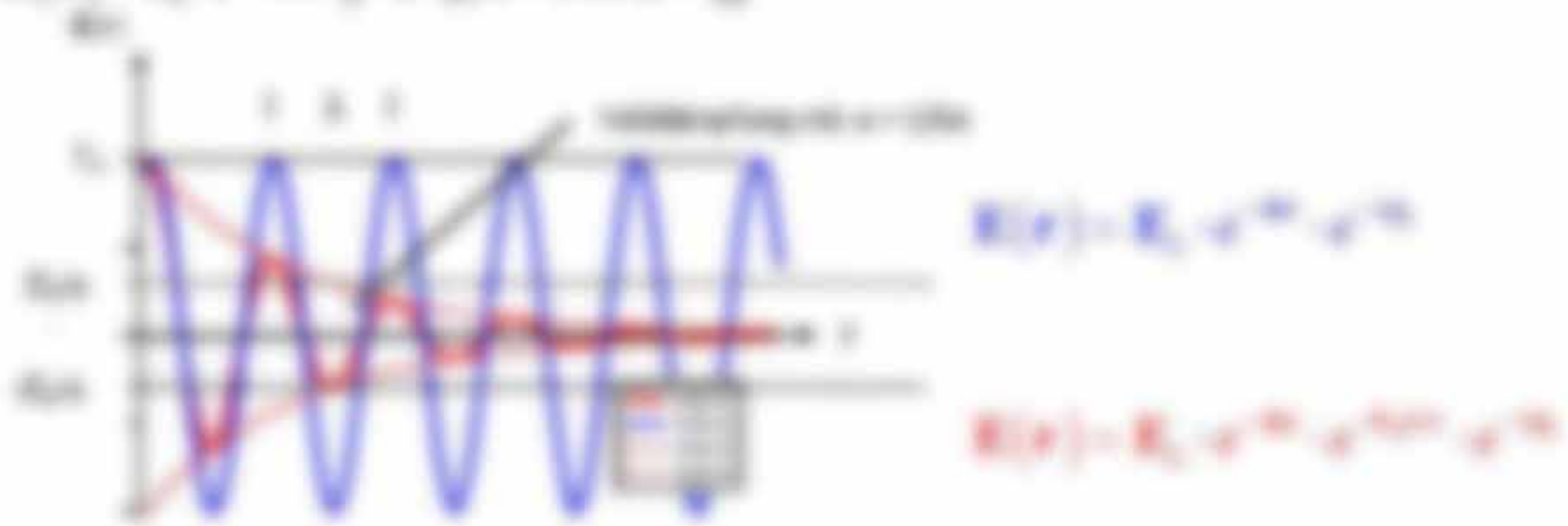


Abbildung 18: Welle in Medium mit verlustloser Leitfähigkeit und in Medium mit verlustiger Leitfähigkeit.

1.8.1 Wellengleichung in leitenden Medien – die Telegraphengleichung

wie bereits oben erwähnt haben wir oben die Ladungsdichten möglicherweise Einfluss auf die optischen Eigenschaften von Medien. Das Verhalten des Plasmas wird stark durch die elektrische Leitfähigkeit σ beeinflusst.

Maxwell-Gleichungen mit σ (Driftstrom): $\nabla \cdot (\nabla \phi + \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho$

$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho$ (ergibt sich auf $\Delta \phi = -\rho$): $\nabla \cdot (\nabla \phi + \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho = -\rho$

$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho$ (ergibt sich auf $\Delta \phi = -\rho$): $\nabla \cdot (\nabla \phi + \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\rho = -\rho$

Dies führt auf die Telegraphengleichung

$$\underbrace{\Delta \phi - \mu \mathbf{J}}_{\text{homogenes System}} = \underbrace{-\rho}_{\text{Inhomogenes System}} \quad (1.8.1)$$

Die Dämpfung des Feldes im Medium wird beschrieben durch die Leitfähigkeit σ , also der Term $\mu \mathbf{J}$ vor der Wellengleichung Δ . Die Leitfähigkeit σ verändert das elektrische Feld, wobei kann man $\mu \mathbf{J}$ durch $\mu \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}$ ersetzen (1.8.1), um die lineare Maxwell-Gleichung als Partialdifferentialgleichung zu beschreiben.

Die Telegraphengleichung (1.8.1) lässt sich für den homogenen, d.h. leitungslosen Fall ($\sigma = 0$) lösen durch den Ansatz einer ebenen geladene Welle $E(x,t) = E_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - \beta x)$, wobei in Richtung x propagiert, so dass

$$(\Delta_x - \mu \sigma) E = \mu \sigma E = -\mu \sigma E = 0 \quad (1.8.2)$$

Man setze $k(\omega) = \omega^2 + i\alpha\omega$ und beachte, dass es gilt $k(\omega) = \omega^2 + i\alpha\omega$ und damit ergibt sich für den Realteil $\Re(k(\omega)) = \omega^2$ und für den Imaginärteil $\Im(k(\omega)) = \alpha\omega$. Aus dem Imaginärteil ergibt sich $\Im(k(\omega)) = \alpha\omega$ und somit für die Dämpfung in der Telegraphengleichung (siehe Formel (1))

$$k_1(\omega) = \alpha\omega \quad \text{für } \omega > 0 \quad \text{(siehe hier mit } \omega^2 = \omega^2 \text{ (siehe hier mit } \omega^2 = \omega^2 \text{))}$$

Dämpfung in Medien

Es soll sich zeigen, dass die Dämpfung $d = \Re(k(\omega)) = \omega^2$ (siehe hier)

(i) im verlustfreien Fall $\alpha = 0$ ($k(\omega) = \omega^2$) gilt, dass die Dämpfung $d = \omega^2$ (siehe hier) ist

$$k_1(\omega) = \omega^2 \quad \text{und die Dämpfung ist } d = \Re(k(\omega)) = \omega^2$$

(ii) im verlustigen Fall $\alpha > 0$ ($k(\omega) = \omega^2 + i\alpha\omega$) gilt, dass die Dämpfung $d = \omega^2$ (siehe hier) ist

$$k_1(\omega) = \omega^2 \quad \text{und die Dämpfung ist } d = \Re(k(\omega)) = \omega^2$$

Es ergibt sich mit (i) die Dämpfung $d = \omega^2$ (siehe hier) für die Dämpfung in Medien

$$k_1(\omega) = \omega^2 + i\alpha\omega \quad \text{für } \omega > 0 \quad \text{(siehe hier)} \quad (2.10)$$



Die äußere Hülle der Apollo-Raumsonde wurde mit einer dünnen Schicht aus Gold, die ca. 100 nm dick war, versehen. Dies diente dazu, die empfindlichen Instrumente vor der schädlichen ultravioletten Strahlung zu schützen. Durch die Verwendung von Gold wurde die Lebensdauer der Sonde verlängert, da es sich um ein sehr korrosionsbeständiges Material handelt (siehe hier).

Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen (siehe hier) und der Maxwell-Gleichungen (siehe hier) erhält man die Maxwell-Gleichungen (siehe hier)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{ext}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} \quad \text{(siehe hier)} \quad (2.11)$$

aus welcher sich für schwach veränderliche Medien (siehe hier) die Maxwell-Gleichungen ableiten lässt. Über diese lässt sich zeigen, dass Licht in inhomogenen Medien immer den schnellsten Weg geht (Fermat-Prinzip).

2.3. Wellenfunktionen im Orts- und Frequenzraum

Man ist an unendlich, ebenelementare Wellen in Abhängigkeit vom Ort interessiert, weil es in praktischen, oft in Abhängigkeit ihres Impulses in eine bestimmte Richtung $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ (Ausbreitung, d.h. über den Ort der Wellenfronten entlang \mathbf{r} , vgl. 2.1).

Der Betrag der Wellenvektoren $|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ beschreibt den scharfen Impuls der elementaren Wellen bzw. des Phasens. Nach Anwendung muss eine ebene Impulscharakteristik ist eine große Ortsunschärfe mit sich bringen: $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta p \rightarrow \infty$.

Wellenfunktion
$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$$
 (2.37)

Das macht klar, dass eine ebene Welle unendlich ausgebreitet, ist, vgl.

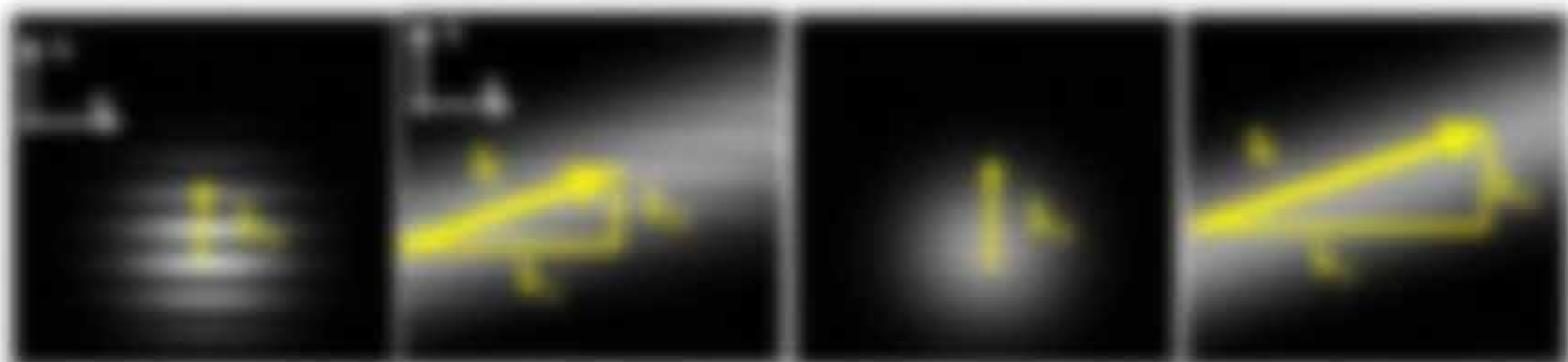


Abbildung 2.3: Die Ausbreitungsrichtung der Wellenfronten einer elementaren Welle, jeweils in einer der drei Richtungen der kartesischen Koordinaten der Wellenvektors \mathbf{k} , d.h. der Wellenlänge λ .

2.3.1. Darstellung einer elementaren Welle im Ortsraum

Man betrachtet häufig Wellenfronten, welche ebenelement unendlich ausgebreitet sind.

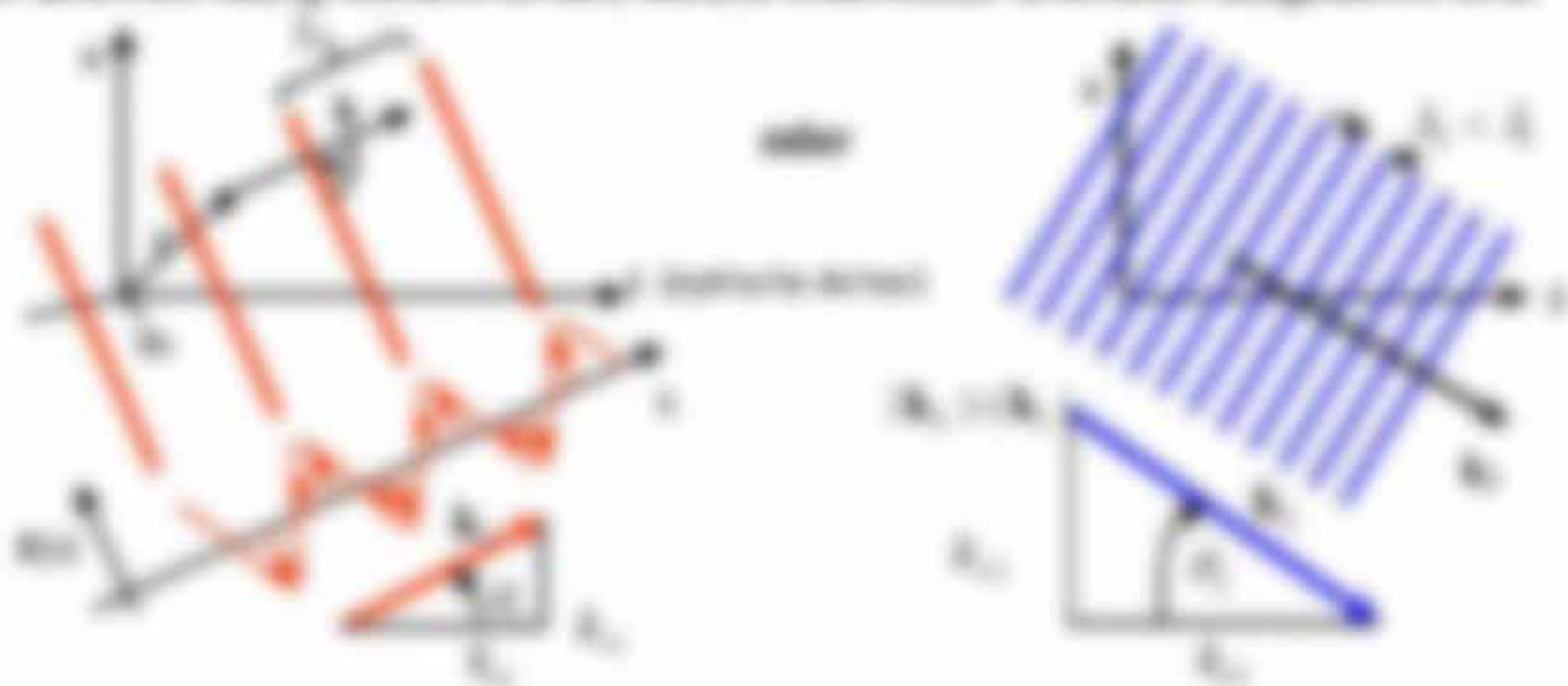


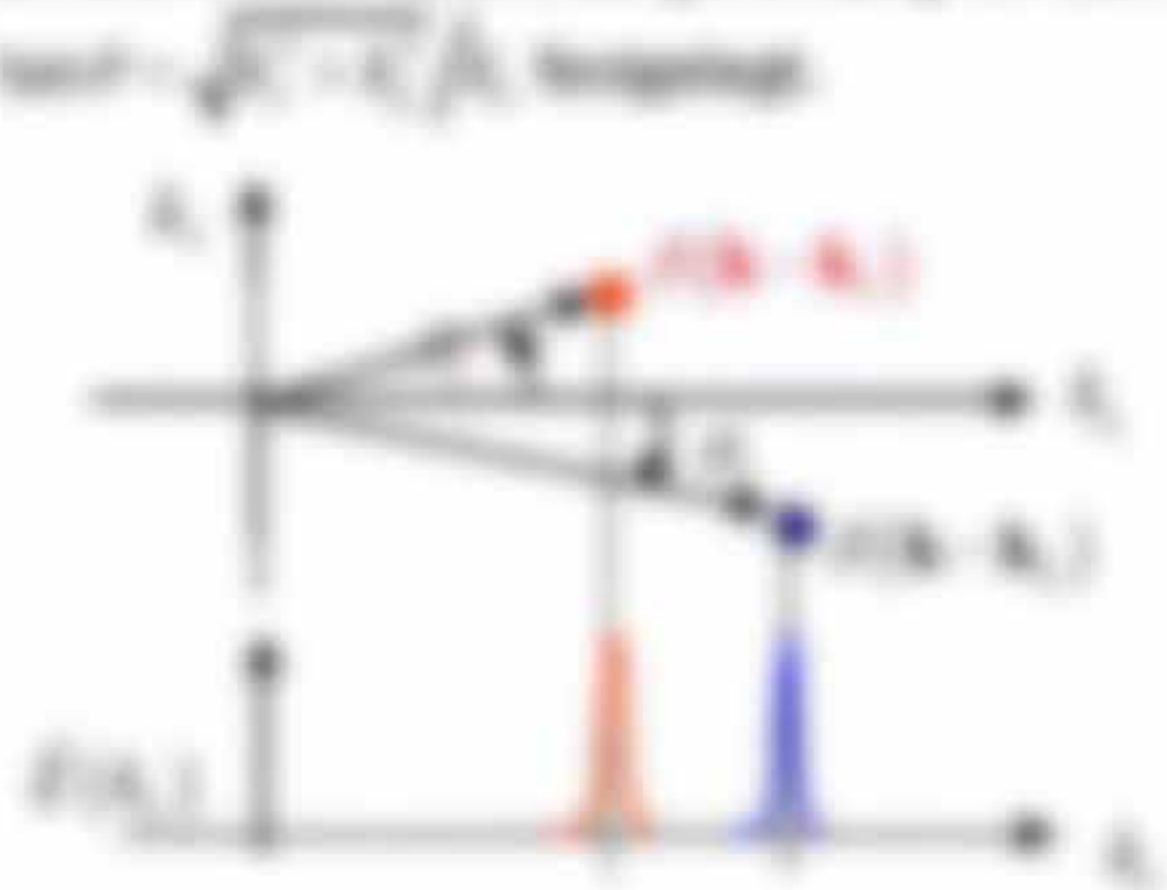
Abbildung 2.3.1: Darstellung einer elementaren Welle im Ortsraum. Die Wellenfronten sind als rote Pfeile dargestellt. Die Wellenvektoren sind als blaue Pfeile dargestellt. Die Wellenlänge ist als λ bezeichnet.

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ist maximal, wenn $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$, d.h. die Phase ändert sich schnell, wenn \mathbf{r} in Richtung \mathbf{k} läuft (falls \mathbf{r} weit von \mathbf{k} weggeht, ändert sich die Phase nur langsam). Falls $\mathbf{k}_x = 0$ oder $\mathbf{k}_y = 0$, entsprechend, dann ändert sich ebene Welle durch den Wellenvektor \mathbf{k} nicht in Richtung \mathbf{k} .

2.1.2. Darstellung in 2-Raum

Wie bereits erwähnt ist die ebene Welle unendlich ausgedehnt ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$), es gilt keine Einschränkung, dass die Information in einem Punkt über alle 2-Dimensionen in Umgebung begrenzt, denn nicht ein 2-Punkt zur Beschreibung aus.

Die ebene Welle in 2-Raum beschreibt die Wellenlänge über den Abstand $|\vec{r}| = 2\pi/\lambda$ und den Winkel der Ausbreitungsrichtung ist über den Winkel θ zur vertikalen Achse, die über $\cos\theta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\lambda}$ festgelegt.



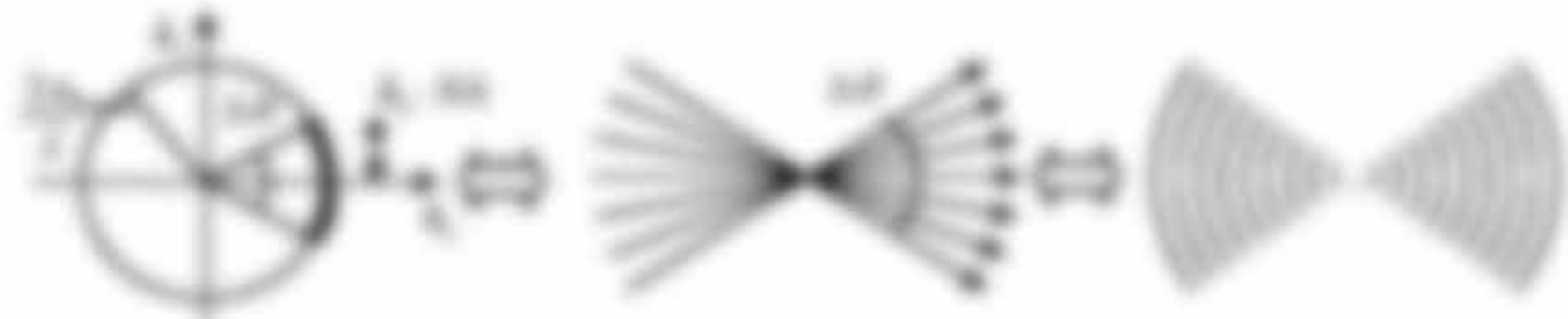
Wellenvektor in 2D-Raum

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$\vec{k} = k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2$

Wichtig ist hier dass Winkel θ und λ sind an jedem Punkt in einem Medium konstant

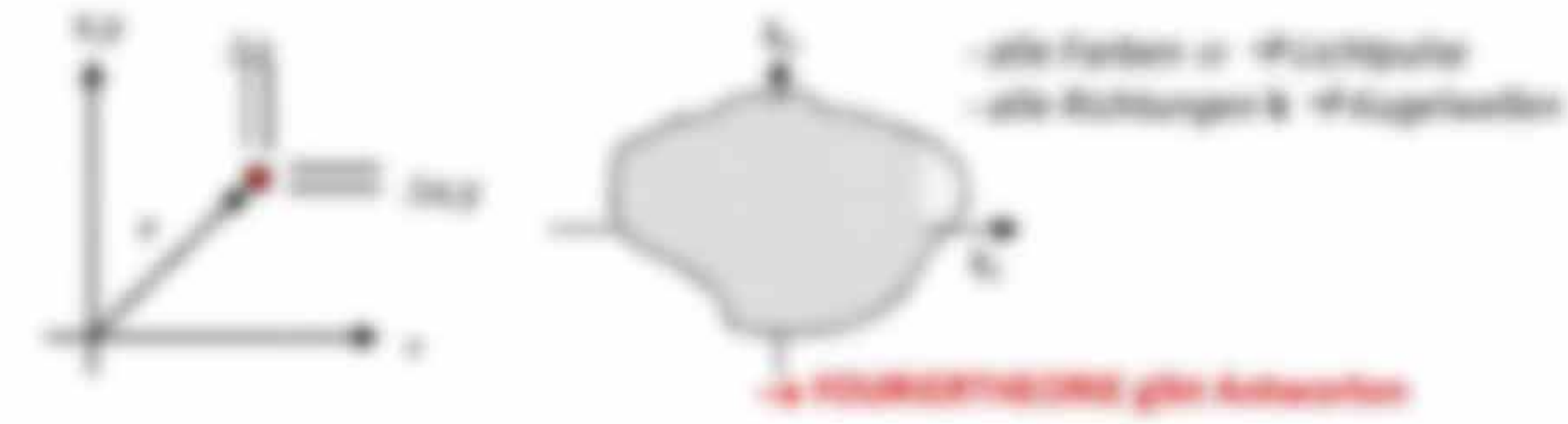
Wird diese Welle zur Kreiswellen $\lambda = 2\pi$, die gleiche Raumfrequenz $k = 2\pi/\lambda$ lassen sich Folgeresultate ableiten:



Wichtig ist hier dass diese Welle an den Stellen der Wellenlänge λ konstant ist, unabhängig von Wellenlänge λ und Winkel θ , die hier die Ausbreitungsrichtung in einem Medium konstant

Man hat also eine ebene Wellen mit Öffnungswinkel $\theta = 0$. Eine wichtige Charakterisierung für Folgeresultate ist die Normierte Apertur $NA = \sin\theta \approx \theta$ (für $\theta \ll 1$)

Beispiel: Wie weit man Licht ab einer Quelle das über θ maximal und $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}$ maximal maximal über Ausbreitung maximal in jeder Richtung



3. Fourier-Optik

- Alles was wir mit unseren Augen sehen können, ist die Überlagerung von Lichtwellen mit unterschiedlicher Phase und Amplitude (hell und dunkel), aber auch Änderungen der Wellenlänge und somit alles eine Superposition von ebenen Wellen, spricht eine Fourier Reihe oder ein Fourier Integral
- Die Fourier Transformation ist in vielen Gebieten der Naturwissenschaft und Technik ein wichtiger Werkzeug. Besonders sinnvoll ist er in der Optik aufgrund der Dreidimensionalität und der Abstrahierbarkeit von Wellen-Erscheinungen über Überlagerungen.

3.1. Einführung

- Eine räumliche Lichtverteilung zerlegt sich durch Ausbreitung selbst in ihr Fourier-Spektrum, d.h. in ein Spektrum ebener Wellen
- Wichtig und praktisch: Eine Linse wirkt als Fourier-Transformator
- Grundidee und Notwendigkeit: Was denken wir den Fall (Beck), den man in den See wirft, und an die ankommenden steilen Wellen an über!

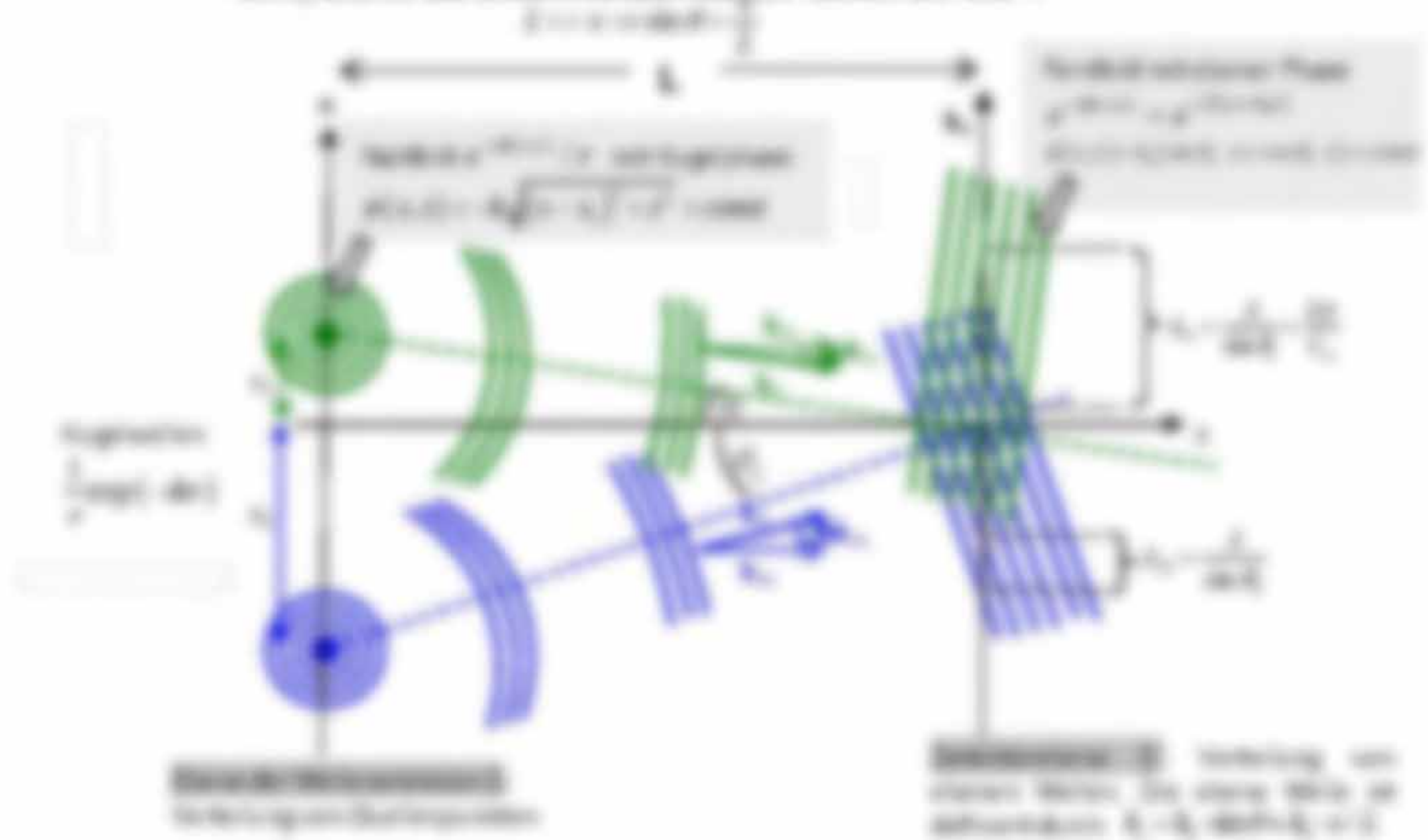


Abbildung 11: Räumliche Lichtverteilung zerlegt sich in ebene Wellen (Fourier-Transformierte), welche sich in der Fourier-Ebene auf addieren und der resultiert der Wellenvektor mit der Wellenlänge λ' durch die Wellenlänge λ , die der ebenen Wellenfronten in der Eingangsebene. Die Wellenlänge λ' ist die Wellenlänge der Wellenfronten in der Fourier-Ebene, welche die Wellenvektorkomponenten k_x und k_y sind. Die Wellenlänge λ' ist die Wellenlänge der Wellenfronten in der Fourier-Ebene, welche die Wellenvektorkomponenten k_x und k_y sind.

Der gesamte Schicht durch eine ebene Welle liegt über der Welle aus:

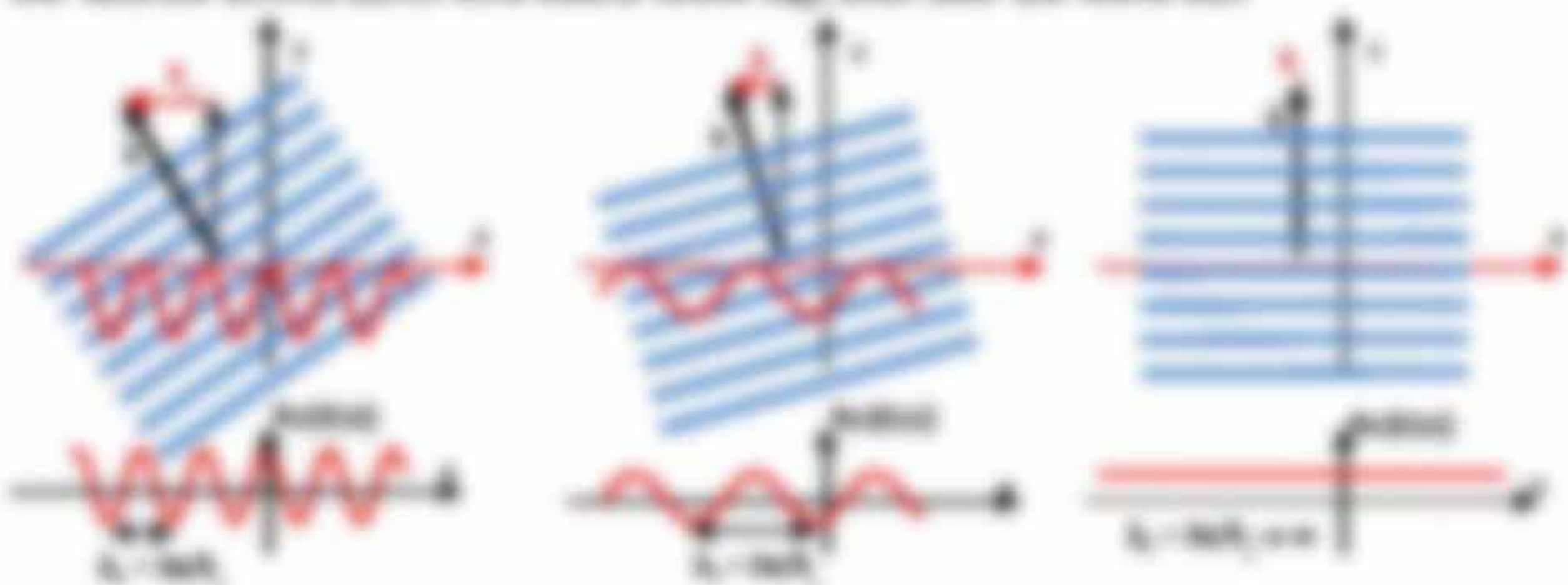


Abbildung 10: Eine ebene Welle, die senkrecht oder unter einem Winkel θ auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien eintrifft, die durch einen Winkel θ' reflektiert oder unter einem Winkel θ'' in das zweite Medium n_2 gebrochen wird. Die Wellenlängen sind λ_1 und λ_2 .

Verbreitung $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ \rightarrow $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -A k \sin(kx - \omega t)$ \rightarrow Verbreitung $F(x, t) = F_0 \cos(kx - \omega t)$

Das ist die Fourierentwicklung einer ebene Welle mit Amplitude F_0 (Teil der Ebene $z = 0$) aus dem Ursprung in die positive x -Richtung. Das ist ein komplexes System mit Wellen unterschiedl. zu vertragen: $\cos(kx - \omega t) = \frac{1}{2} (e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)})$

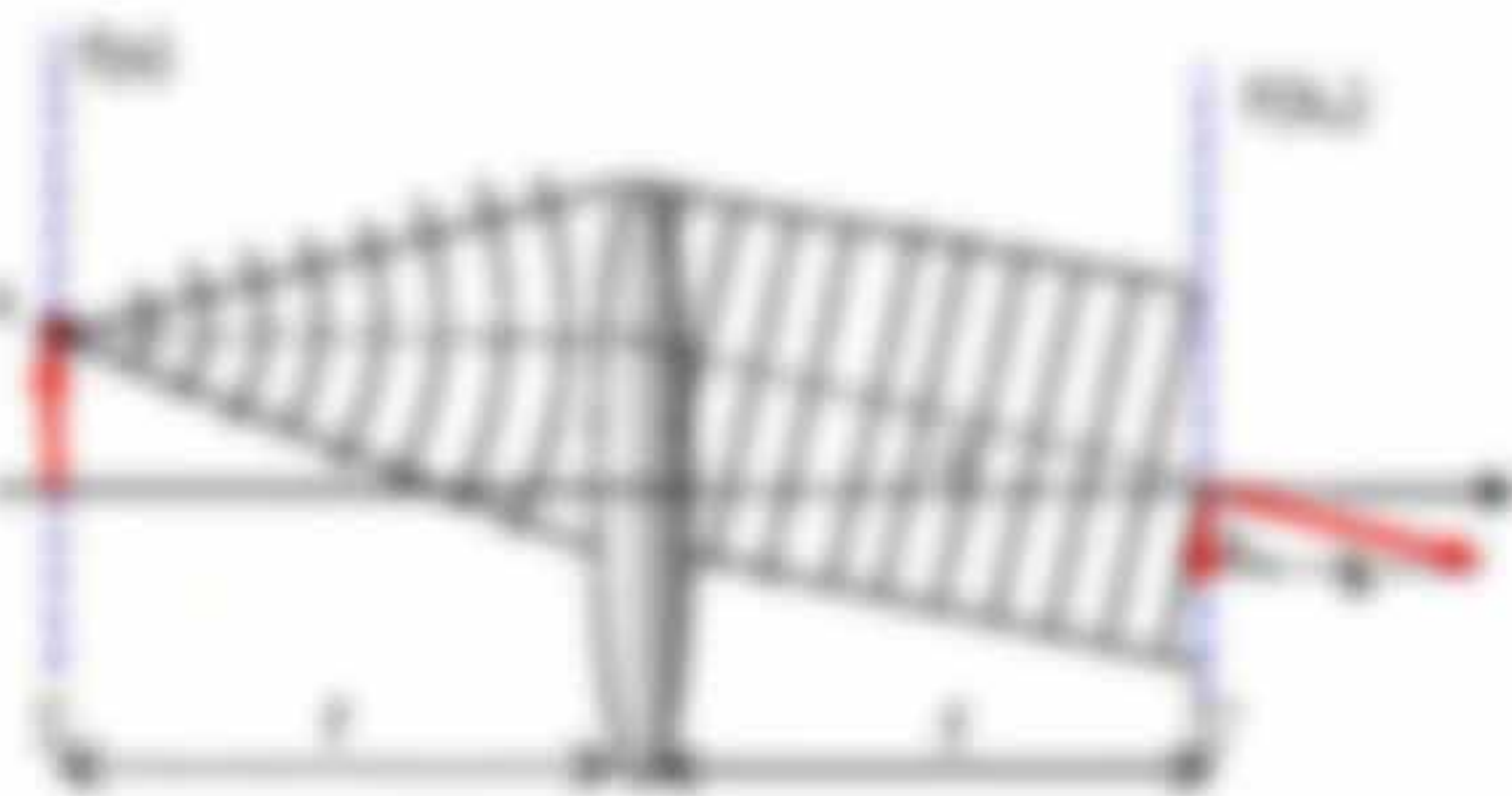


Abbildung 11: Ein Querschnitt der Antenne ist hier zu sehen. Die Wellenlänge λ ist hier durch $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ gegeben. Die Wellenlänge λ ist hier durch $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ gegeben.

Man sieht, das man in dieser Konfiguration die x -Position der Quelle aus der Richtung θ des k -Vektors bzw. aus seiner x -Komponente $k_x = k \cos(\theta)$ bestimmen kann. Deshalb wird eine Fourierentwicklung typischerweise durch eine Funktion der Wellenzahl k_x (Raumfrequenz) ausgedrückt. $F(k_x)$ wird auch Wellenpaketraum genannt.

Wellenpakete in der Ebene $z = 0$ überlagern sich ebene Wellen aus den Richtungen $\theta_1, \theta_2, \dots$ und sind jeweils Modulationen $\cos(k_x x - \omega t)$, welche durch eine Verteilung von Punktsourcen an der Stelle x_j mit Amplituden $A_j = A(x_j)$ in der Ebene $z = 0$ erzeugt ist.

$$F(k_x) = A_1 e^{i k_x x_1} + A_2 e^{i k_x x_2} + \dots = \sum_j A_j e^{i k_x x_j}$$

Erkläre die Zerlegung einer stetigen Funktion in eine Reihe von Sinus- und Cosinus-Funktionen

Es gilt $\cos(x \pm \pi) = \cos x$ und $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ sodass:

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi k) = \sin x$$

Womit aus (2.2) folgt:
$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(2\pi k x) \quad (2.3)$$

Wegen der Orthogonalität $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k x) \cos(2\pi l x) dx = \delta_{kl}$

gilt für: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi k x) dx = \frac{1}{2} A_k$ wobei $A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ und $A_k = 0$

Unter Ausnutzung der Orthogonalität der \cos - und \sin -Funktionen kann sich durch Einsetzen in (2.3) zeigen, dass

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi k x) dx \quad \text{und} \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi k x) dx$$

2.2. Die Fourier-Transformation

2.2.1. Grundlagen

Jede reellewertige stetige Funktion $f(x)$ kann sich als Integral über harmonische Wellen $e^{i\omega x}$ mit Amplitude $F(\omega)$ schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (2.4)$$

Die Amplitudenverteilung ist die Fourier-Transformierte bzw. das Spektrum $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (2.5)$$

Schreibweisen: $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ oder

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)], \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

Im Allgemeinen ist $F(\omega) = -iF(\omega) = +iF(\omega)$ komplex, d.h. hat Real- und Imaginärteil:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad (2.6)$$

oder alternativ Amplituden- und Phasenform $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ 0,5

oder

$$|F(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{F(\omega)\}^2} \quad \text{Amplitudengang}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}}\right) \quad \text{Phasengang}$$

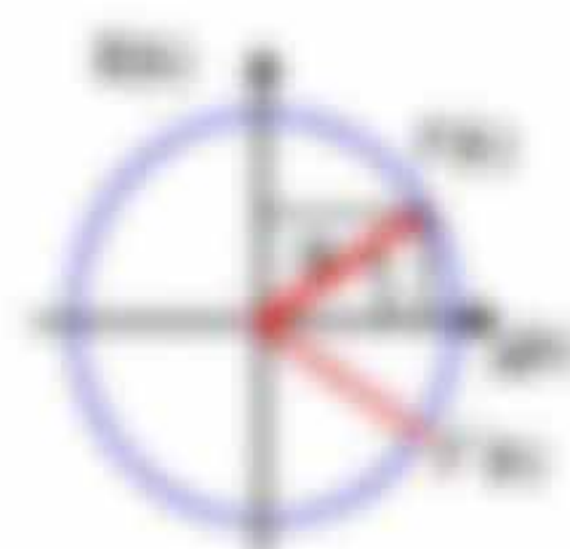


Abbildung 10: Die Phasenform einer komplexen Fourier-Transformierten $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$.

4.2.2 Addition komplexer Zahlen über Phasoren

Wenden mehrere sinusförmige Signale aufeinander an, $\sum_{k=1}^N f_k(t) = c_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots + c_N \cos(\omega t + \varphi_N) = c \cos(\omega t + \varphi)$, so lässt sich die Darstellung über geeignete Phasoren an, welche eine Vereinfachung im komplexen Raum bilden.

Im Beispiel wählen wir $F_1 = 20e^{j(\omega t + \varphi_1)}$, $F_2 = 20e^{j(\omega t + \varphi_2)}$ und $F_3 = 20e^{j(\omega t + \varphi_3)}$.

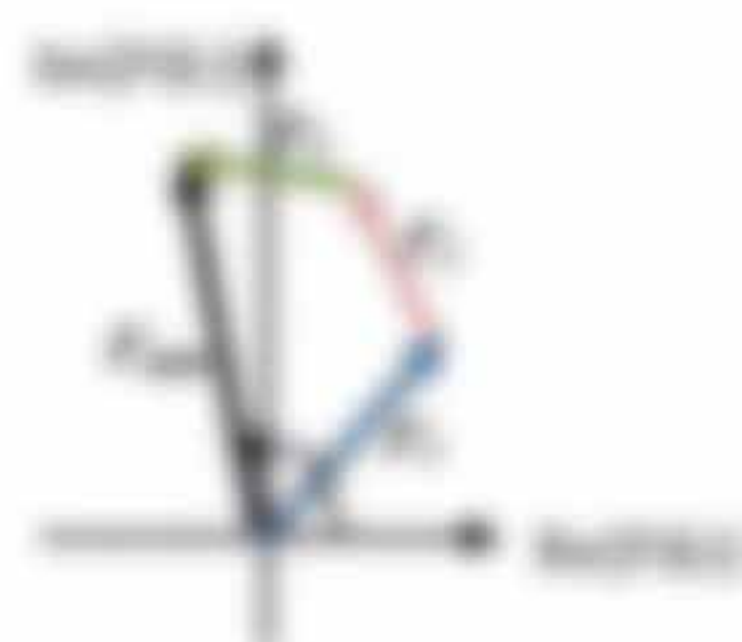


Abbildung 11: Die Phasoren-Addition von drei komplexen Fourier-Transformierten F_k .

4.2.3 Fourier-Eigenschaften

- Linearität $\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}$ 0,5
- Symmetrie $f = \mathcal{F}\{g\} \Leftrightarrow g = \mathcal{F}\{f\}^*$ 0,5
 $\mathcal{F}\{f^*\} = \mathcal{F}\{g\} = f^*(\omega)$ 0,5
- Verschiebung $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}e^{-j\omega t_0}$ 0,5
- Skalierung $\mathcal{F}\{f(at)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \frac{1}{|a|}e^{-j\omega t/a}$ 0,5
- Dualität $\mathcal{F}\{f^*(t)\} = \mathcal{F}\{F(\omega)\}$ 0,5
- Faltung $\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\}$ 0,5
 $\mathcal{F}\{f(t)g(\omega)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \mathcal{F}\{g(\omega)\}$
- Ableitungen $\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\} = \omega \mathcal{F}\{f(t)\}^*$ 0,5
 (auch über die komplexe Theorie)

- **Parseval Theorem:** $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ (Energieerhaltung)
 - **Skalierung:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ (Skalierung)
 - **Integration:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\omega} F(\omega)$ (Skalierung)
 - **Translation:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = F(\omega - \omega_0)$ (Skalierung)
- => Beachten Sie die Skalenänderung (auch Parseval Theorem)

3.2.3. Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$

Die Dirac'sche Deltafunktion, sondern eine Distribution, und beschreibt eine unendlich hohe und unendlich schmale Impulsfunktion ($\delta(x)$)

Definition:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x=0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

0,25

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ (normierte Fläche)}$$

Eigenschaften:

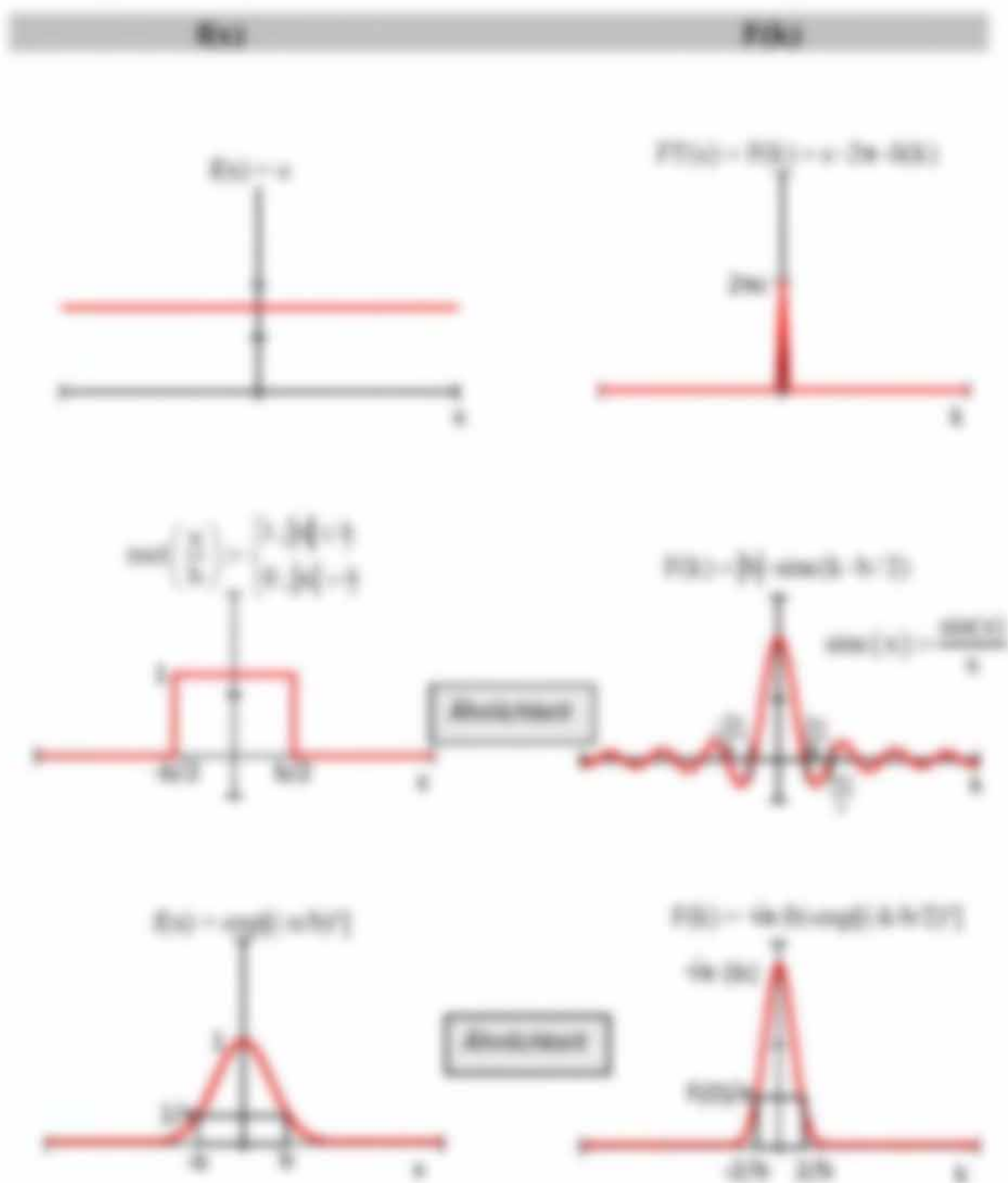
- **Skalierung:** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{|a|}$
- **Translation:** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$
- **Normierte Deltafunktion:** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$ (normiert)

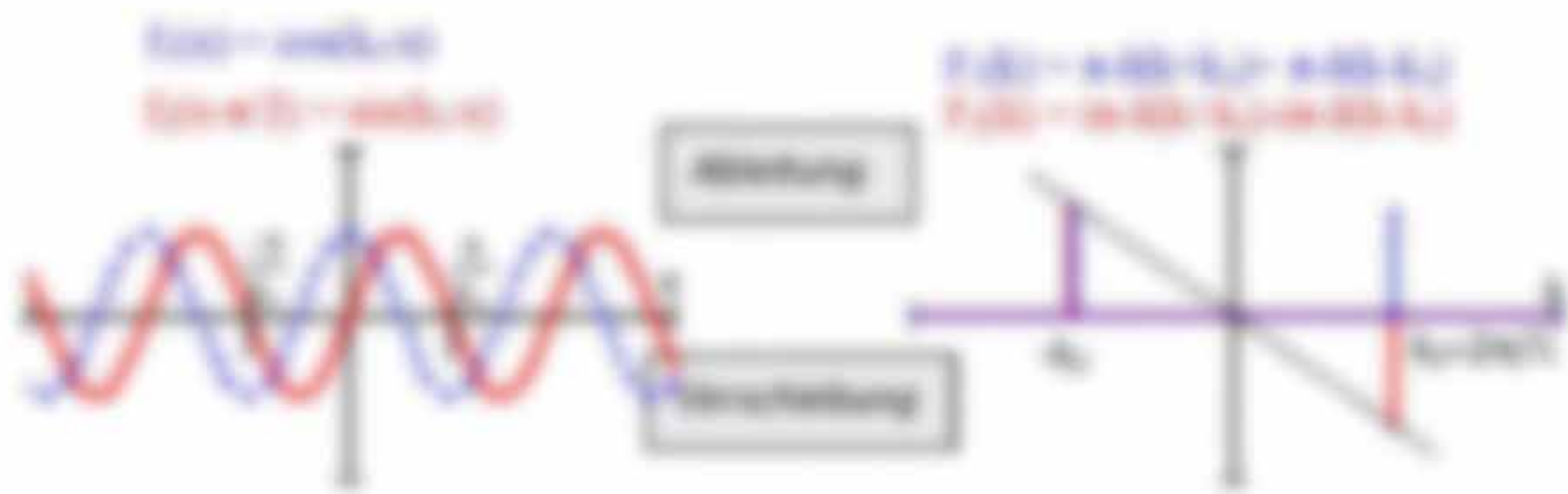


Beachten Sie die Normierung der Deltafunktion (die Fläche unter der Deltafunktion ist 1)

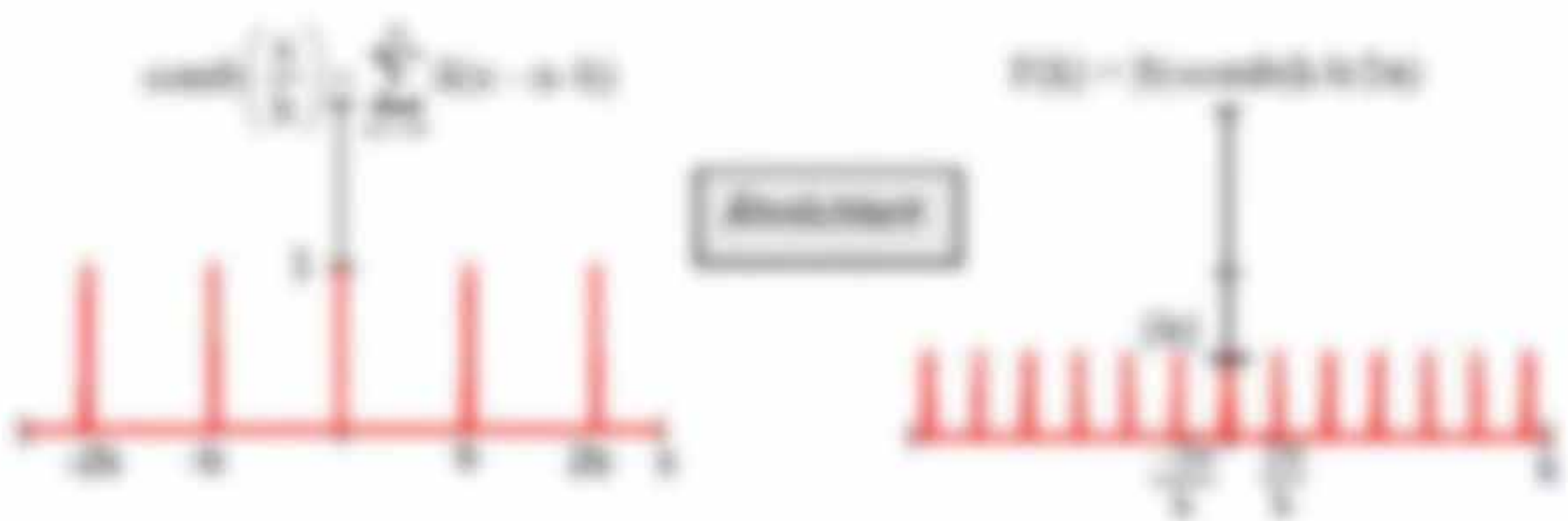
3.2.4 Beispiele

Betrachte die Umkehrrelationen ($x \leftrightarrow 2\pi f$) der Fourierpaare $(f(x))$ und $(F(\omega))$. Beachte auch, dass eine Funktion mit schnelleren Nullen eine Fouriertransformation mit Oszillationen verursacht. Alle Funktionen $f(x)$ sind symmetrisch (das auf $\text{Re}(f(x))$, daher ist der Imaginärteil von $F(\omega)$ gleich null).

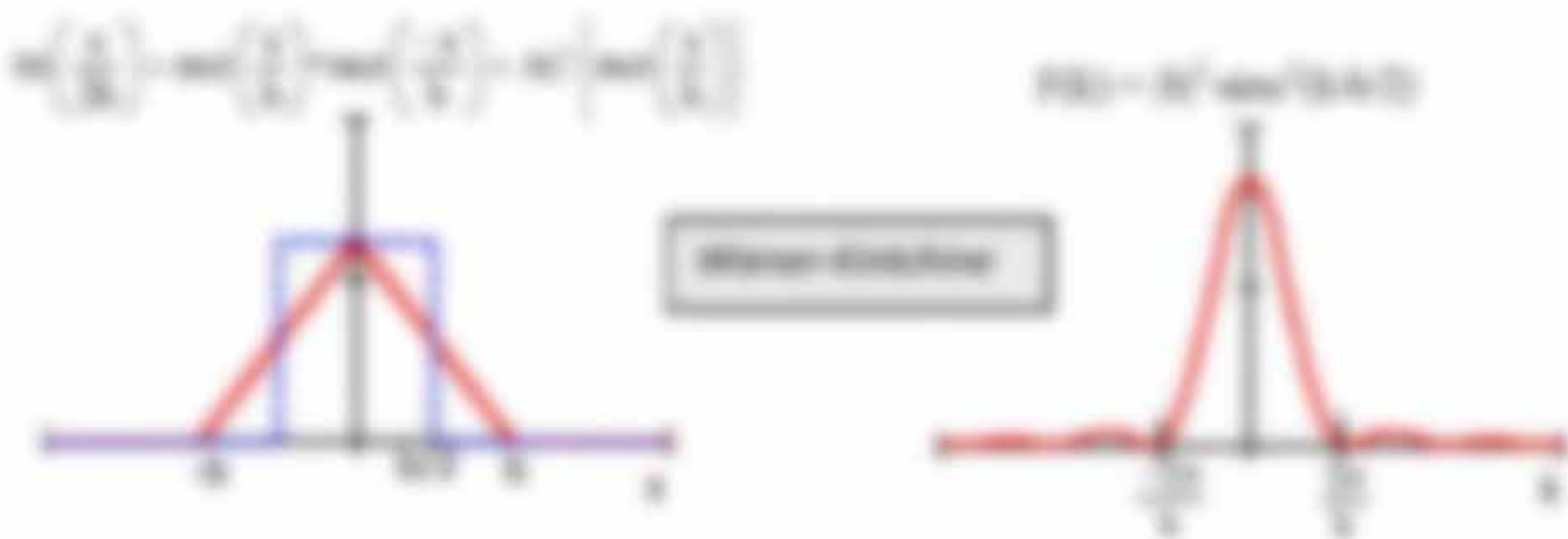




Die Fouriertransformierte der Diracfunktion ist wichtig für das Sampling Theorem:



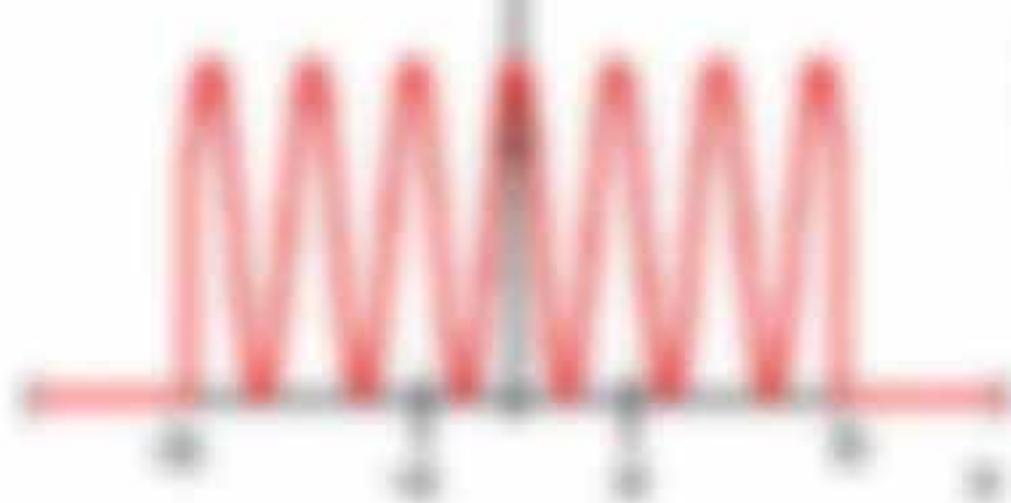
Da man nur Intervallen messen kann, ist $\text{rect}(t/T)$ eine wichtige Operation:



Alle Messgrößen sind in einer Ausdehnung begrenzt, man multipliziert mit $\text{sinc}(x)$

$$\left(\text{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

$$\left(\text{sinc}(2\pi \cdot \lambda x) + \text{sinc}(2\pi \cdot \lambda x) + \text{sinc}(2\pi \cdot \lambda x) \right) \cdot \cos(2\pi \cdot \lambda x)$$



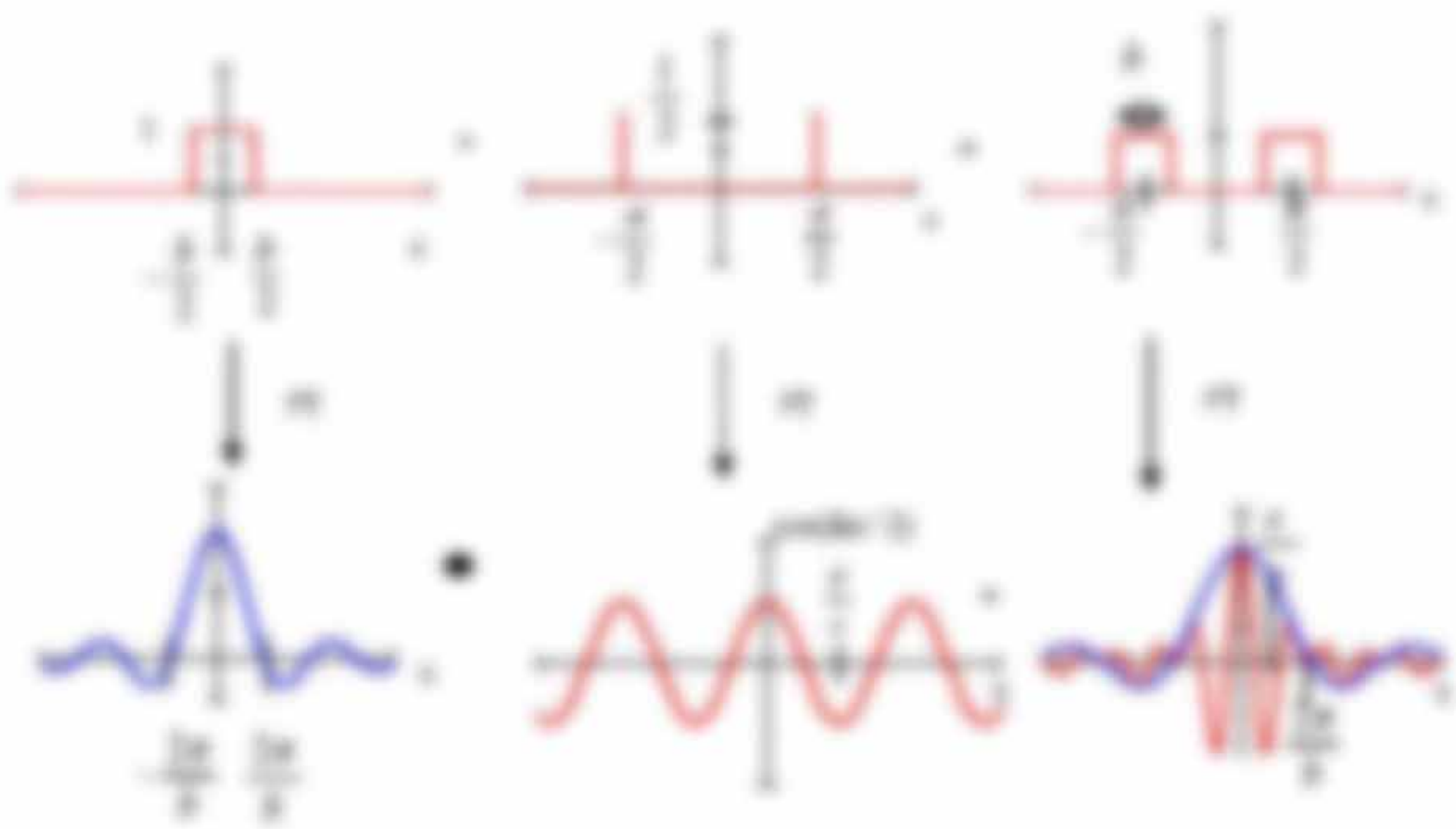
Multiplikation



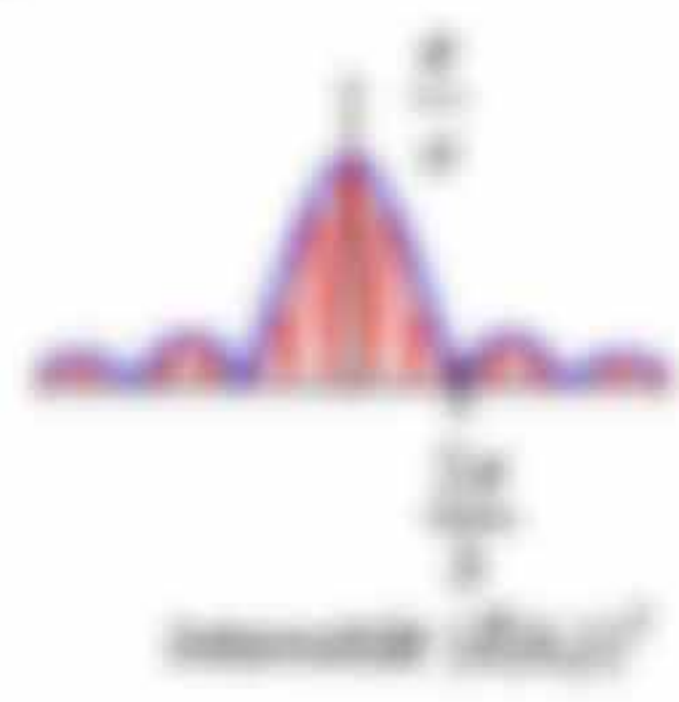
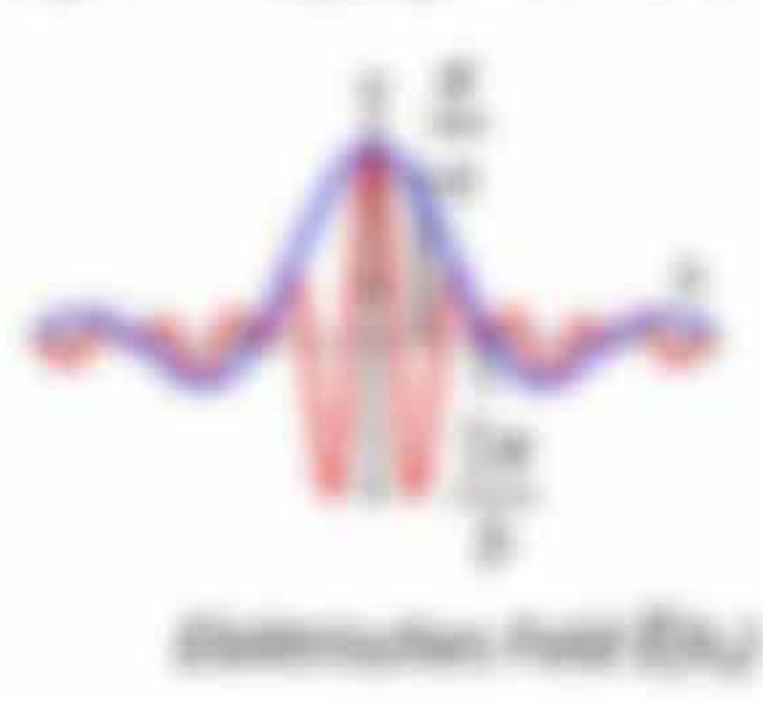
Young's Beugung am Doppelspalt - ein Beispiel für Faltung



Erzeugung des Doppelspalt:



Erzeugung des Beugungsmusters in der Fourier-Ebene



3.2.5. Zweidimensionale Fourier-Transformation

Die Erweiterung auf 2 oder mehr Dimensionen ist einfach. Die Dimensionen sind unabhängig voneinander (= Separierbarkeit)

$$F(x,y) = \frac{1}{\omega} \iint F(x,y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (3.25)$$

$$F(x,y) = \iint f(x,y) e^{i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (3.26)$$

mit den Eigenschaften:

• Linearität $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ (Differentialquotient) (3.27)

• Separierbarkeit $F(x,y) = F(x) \cdot F(y) = F(x,y) = F(x) \cdot F(y)$ (3.28)

Beispiel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f+g+h)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f+g+h)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (f+g+h)}{\partial x^2}$

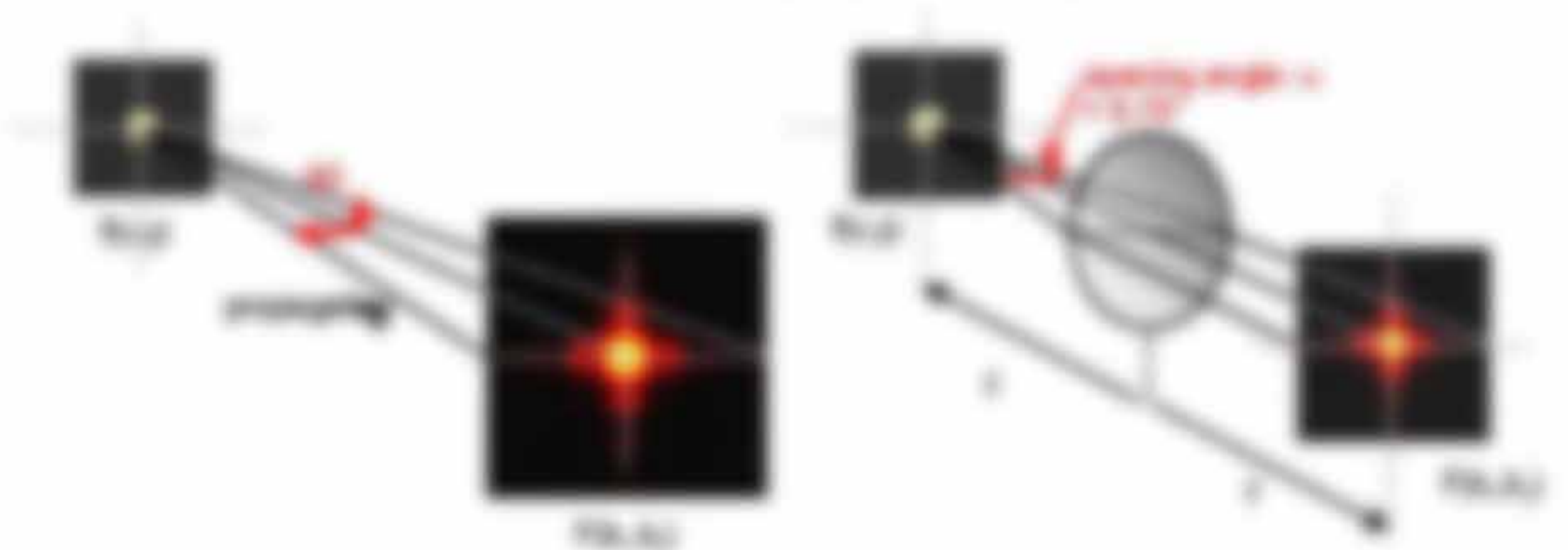


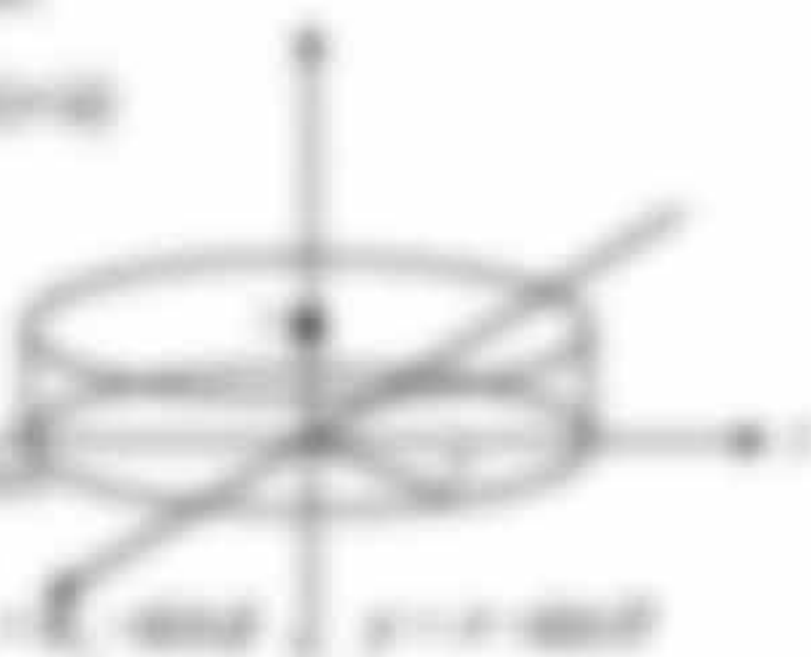
Abbildung 28: Transformation von f(x,y) in ein quadratisches Feld F(x,y) (links) und in ein rechteckiges Feld F(x,y) (rechts).

3.2.6. Fouriertransformation über Kreislinsen

Es ist von besonderer praktischer Bedeutung, da fast alle optischen Systeme Aperturen haben. Man definiert hier die Einstrahlfunktion als Randstrahlfunktion.

$$f(x,y) = F(x,y) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (3.29)$$

Abbildung 29: Transformation über Kreislinsen



Man wähle Polarkoordinaten mit $\xi = \xi \cos \phi, \eta = \eta \sin \phi, \xi = \xi \cos \phi, \eta = \eta \sin \phi$

weiter gilt $\delta(x) \cdot \delta(x) = \delta(x) = \delta(-x)$ und berechnet durch die Fourier-Transformation $F(\delta, \xi) = F(\delta, -\xi)$ die Erhaltungseigenschaft

$$F(\delta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{-i\xi(-x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{i\xi(-x)} dx = F(\delta, -\xi) \quad (3.26)$$

weiter kann die Besetzungsfunktion einer Ordnung m und n B.A.B. $\xi = 0$ mittels $\delta(x)$ und $\delta(-x)$ dargestellt, und verwendet die Nebenformel für Besetzungsfunktionen $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$

$$F(\delta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{i\xi x} dx \quad (3.27)$$

folgt man findet $F(\delta, \xi) = F(\delta, -\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\xi x} dx$ (3.28)

Für die Besetzungsfunktion 1. Ordnung $f(x) = \delta(x)$ findet man die Nullstellen $\xi = \pm 0,5$, $\pm 1,5$, ... bzw. für die 2. Nullstelle gilt:

$$\xi = 1,5 \Rightarrow \xi = \frac{3}{2} \text{ oder } \xi = -1,5 \text{ oder } \xi = -\frac{3}{2}$$

Der Nullstellenabstand $\xi = 1,5$ entspricht der Breite des Beugungsgitters $F(\delta, \xi)$ und mit $\lambda = 1,22 \mu\text{m}$ und spielt eine wichtige Rolle bei der Auflösung optischer Systeme.

Das Beugungsgitter einer Erhaltungseigenschaft besitzt drei Schichten und hat einen Durchmesser $\xi = 1,22 \mu\text{m}$. Die Formel ist:

$$F(\delta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\xi x} dx \quad (3.29)$$

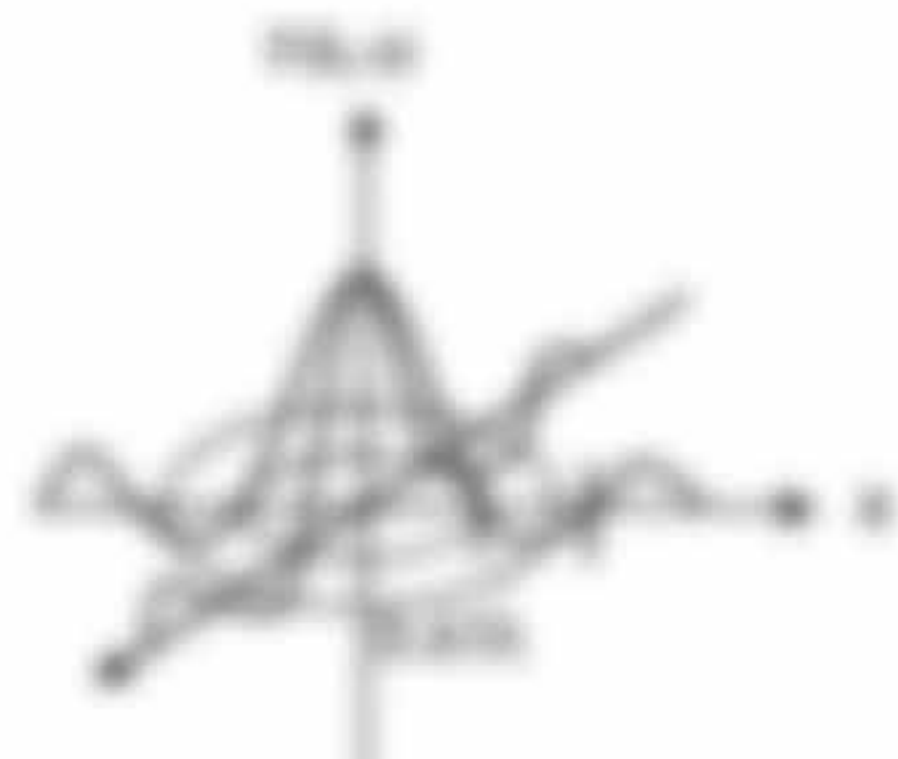
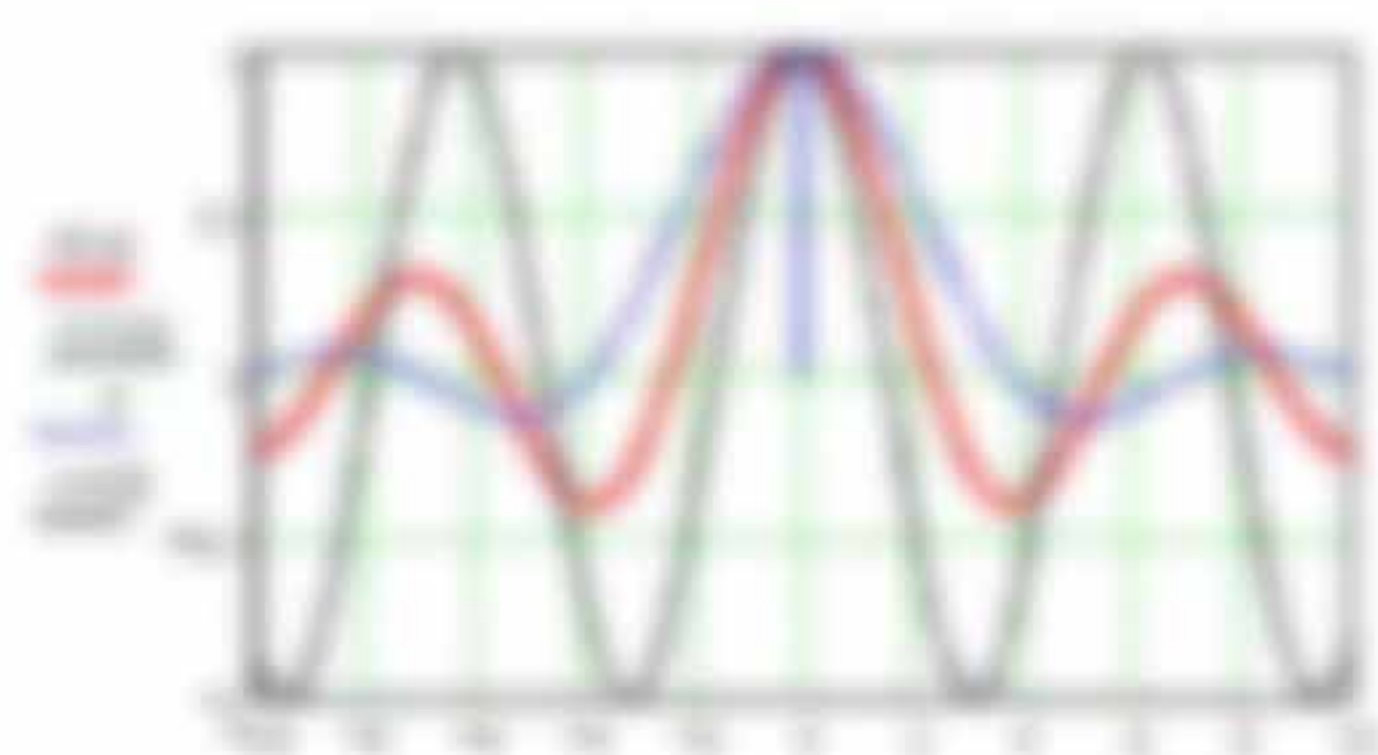


Abbildung 3.1 zeigt die Besetzungsfunktion $f(x)$ und die Beugungsfunktion $F(\xi)$ für ein Beugungsgitter. Die Beugungsfunktion $F(\xi)$ ist die Fourier-Transformation der Besetzungsfunktion $f(x)$. Die Beugungsfunktion $F(\xi)$ ist die Fourier-Transformation der Besetzungsfunktion $f(x)$.

Die Fourier-Transformation

Falls also $P(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - y) dx$ rechteckig ist, dann ist auch $F(x, y)$ rechteckig!
 Es gilt allgemein:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - y) dx$$

0,20

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \delta(x - y) dy$$

0,20

Es kann hier statt dem beliebigen Differenzialsystem (x, y) also dieses System (ξ, η) (Fourier-Verteilung) nur ein System aus beiden rechteckigen Systemen (ξ, η) (Fourier-Verteilung).

Messung der Fourier-Transformation bzw. der Fourier-Verteilung

Eine kurze Wiederholung zur geometrischen Optik befindet sich in Anhang.

Der folgende optische Demonstrationsaufbau eignet sich zur Veranschaulichung der Messungen bzw. Verteilungsexperimente.

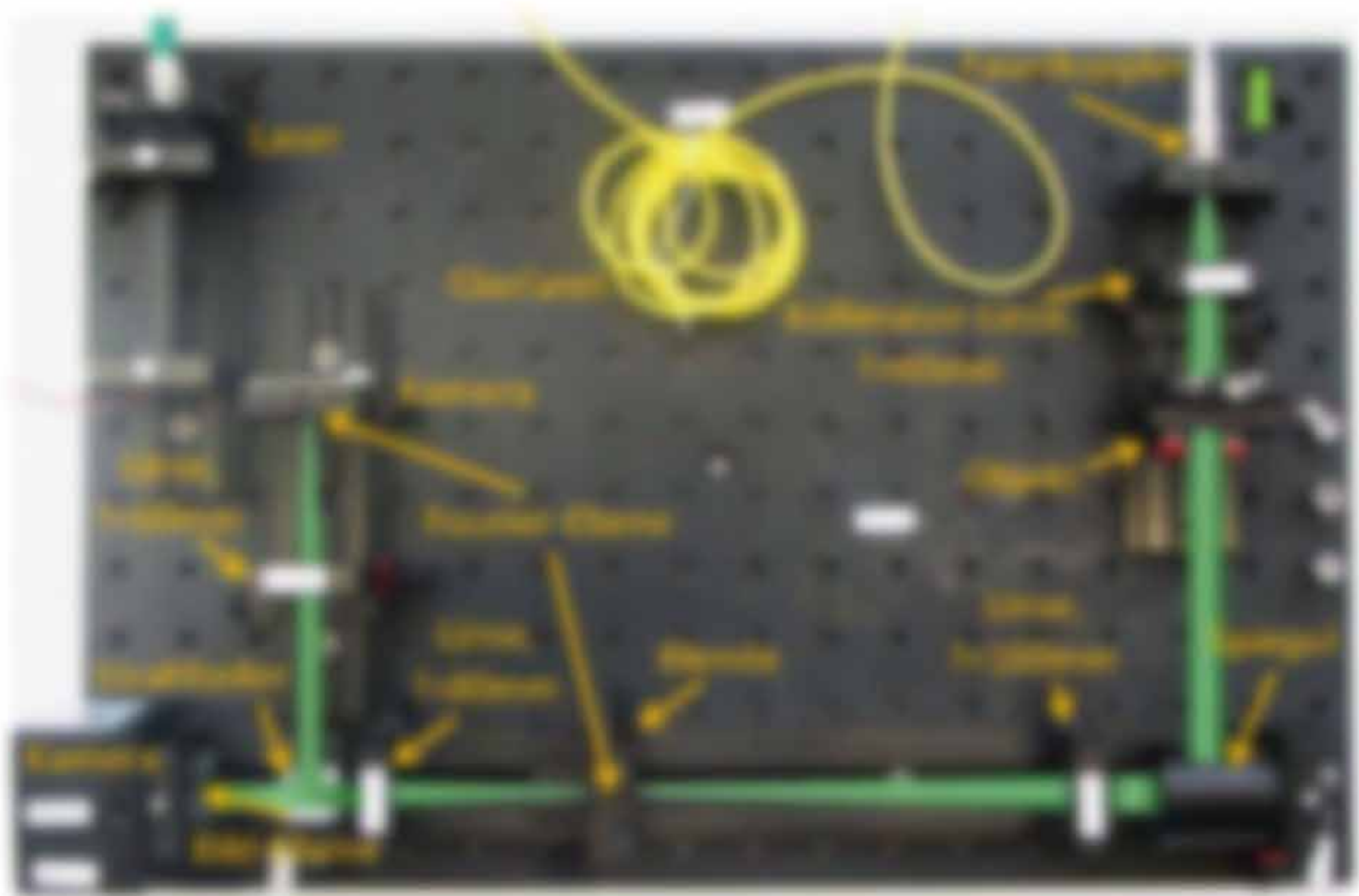
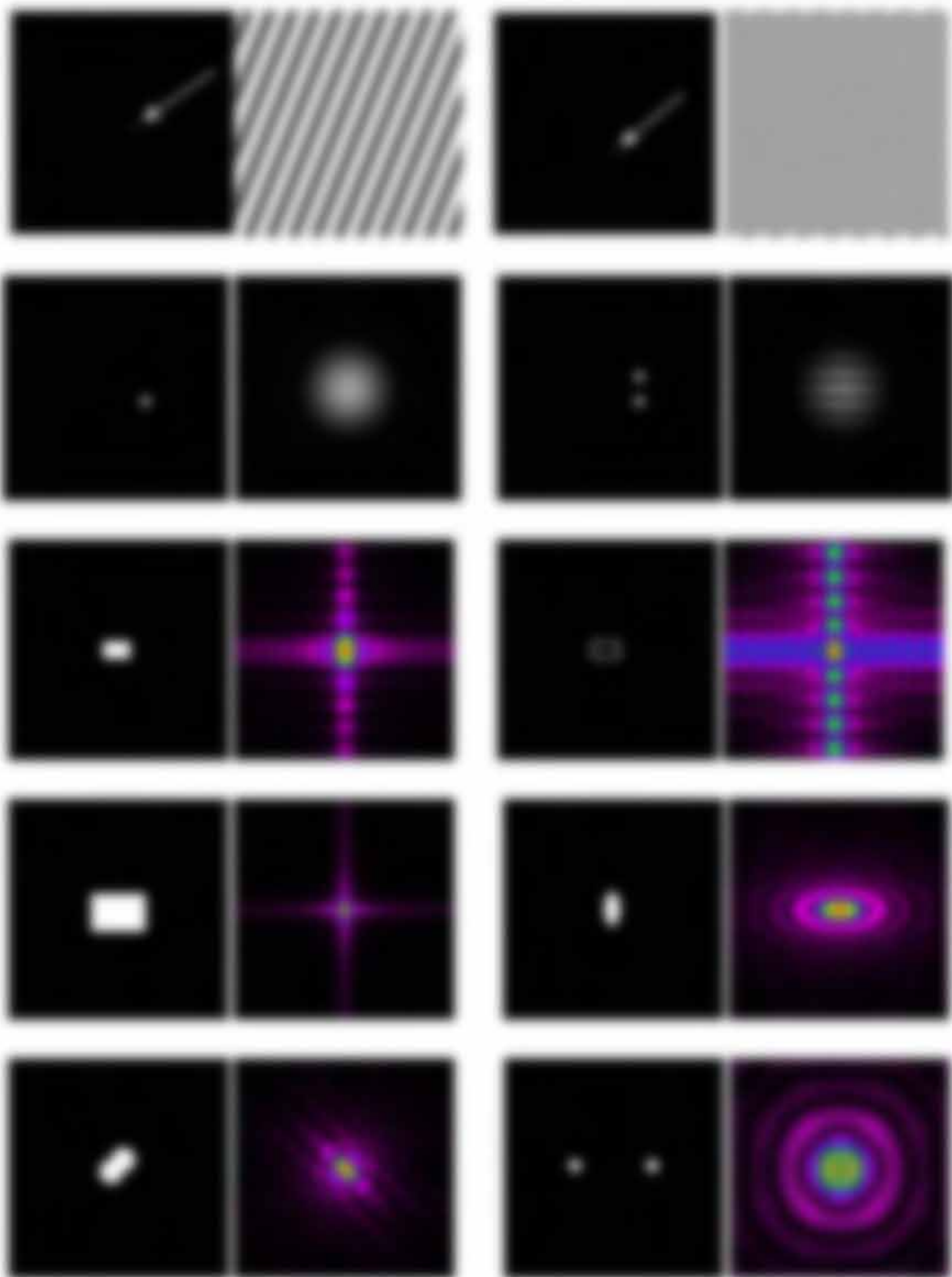


Abbildung 21: Kurze Beschreibung einer Demonstrationsanordnung zur Fourier-Transformation der rechteckigen Verteilung.

Beispiele für 2D-Fourier-Transformationen

2D-Fourier-Paare (by Fast Fourier Transform, FFT)

Links jeweils die Funktion $f(x,y)$ bzw. $F(k_x,k_y)$ rechts der Realteil von $F(k_x,k_y)$ bzw. $f(x,y)$. Wenn kein Maßstab angegeben ist, dann ist die Normierung 1.



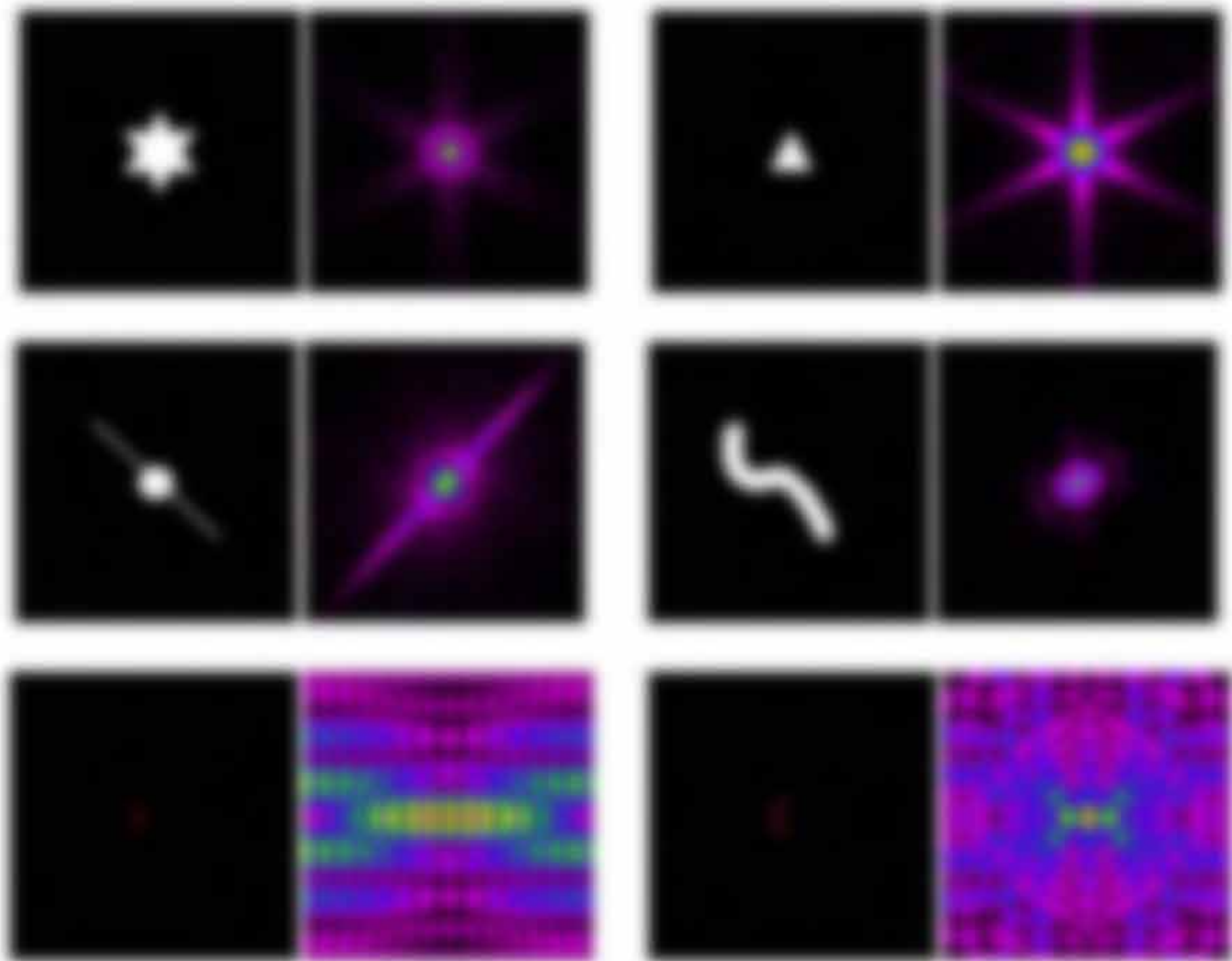


Abbildung einer vertikalen Streifenstruktur $f(x,y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \cos(\pi y) + \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y)$



Abbildung der Fouriertransformation $F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} = \mathcal{F}\{\cos(\pi x) \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \cos(\pi y) + \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y)\}$

3.3. Lineare optische Systeme

Die Maxwell-Gleichungen und deren Lösungen (Punktverteilungen) sind linear. Falls eine Verteilung von Strahlungen $f(x, y)$ an einem Ort und zu einem Zeitpunkt bekannt und z.B. kollimiert, dann bestimmt ein lineares System (zwei durch lineare ODE beschriebene) die Strahlungen $F(x, y)$ an verschiedenen Orten und Zeiten z.B. die Punktverteilung im Fokus.

$$L = \frac{f(x, y)}{\text{Eingangsstrahlung}} = H \frac{F(x, y)}{\text{Ausgangsstrahlung}} \quad (3.30)$$

mit linearem Systemoperator L (z.B. $L^2 = H^2 = I$) für Mehrfachspiegelung, so dass

$$L(Lf) = (L^2)f = (H^2)f = f$$

in der Optik sind diese ODE lineare ODE 2. Ordnung



Man nehme eine dicke Punktverteilung am Eingang (über eindimensional) und schicke sie durch das System (z.B. ein komplexes optisches Instrument). Aus dem x -Punkt entsteht eine Verteilung von Punktverteilungen am Ausgang.

$$\text{man } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$$

$$\text{dann } F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy dx = \text{man} \quad (3.31)$$

Wie bekommt man die Systemmatrix?

Wird das System mit einem δ -Puls gestreut, so entsteht $g(x) = \delta(x)$ als Antwort.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = g(x) \quad (3.32)$$

$g(x)$ heißt die Impulsantwort (Antwort auf δ -Impuls) bzw. Punkt-Antwort-Funktion (engl. Point Spread Function, PSF) bzw. die Green'sche Funktion des Systems.

$$L^2 g(x) = g(x) = \delta(x) \quad (3.33)$$

z.B. über die Eigenwerte der Mehrfachspiegelung

$$L^2 g(x) = g(x) = (L + L^2) g(x) = \delta(x) \quad \text{mit } g(x) = \frac{\delta(x)}{L} \quad \text{mit } g(x) = \delta(x) = \delta(x) = \delta(x)$$

Wie bekommt man die Ausgangsgröße $z(x)$ aus $z(x')$?

- Jede Impulsantwort (Drehimpulsantwort) $g(x) = \delta(x - x')$ durch Strahlung mit δ -Puls
- Diese Ausgangsgröße bzw. Bild $z(x)$ als Überlagerung aller Ausgangsgrößen
- Bestimme dann den Eingang (die Systemanregung) bzw. die Übertragungsfunktion

Der Ausgang $z(x)$ ergibt sich also aus der Überlagerung aller mit dem Eingang $z(x')$ gewichteten Impulsantworten $g(x)$, was einer Faltung entspricht:

$$z(x) = \int z(x') g(x - x') dx' \quad (0.20)$$

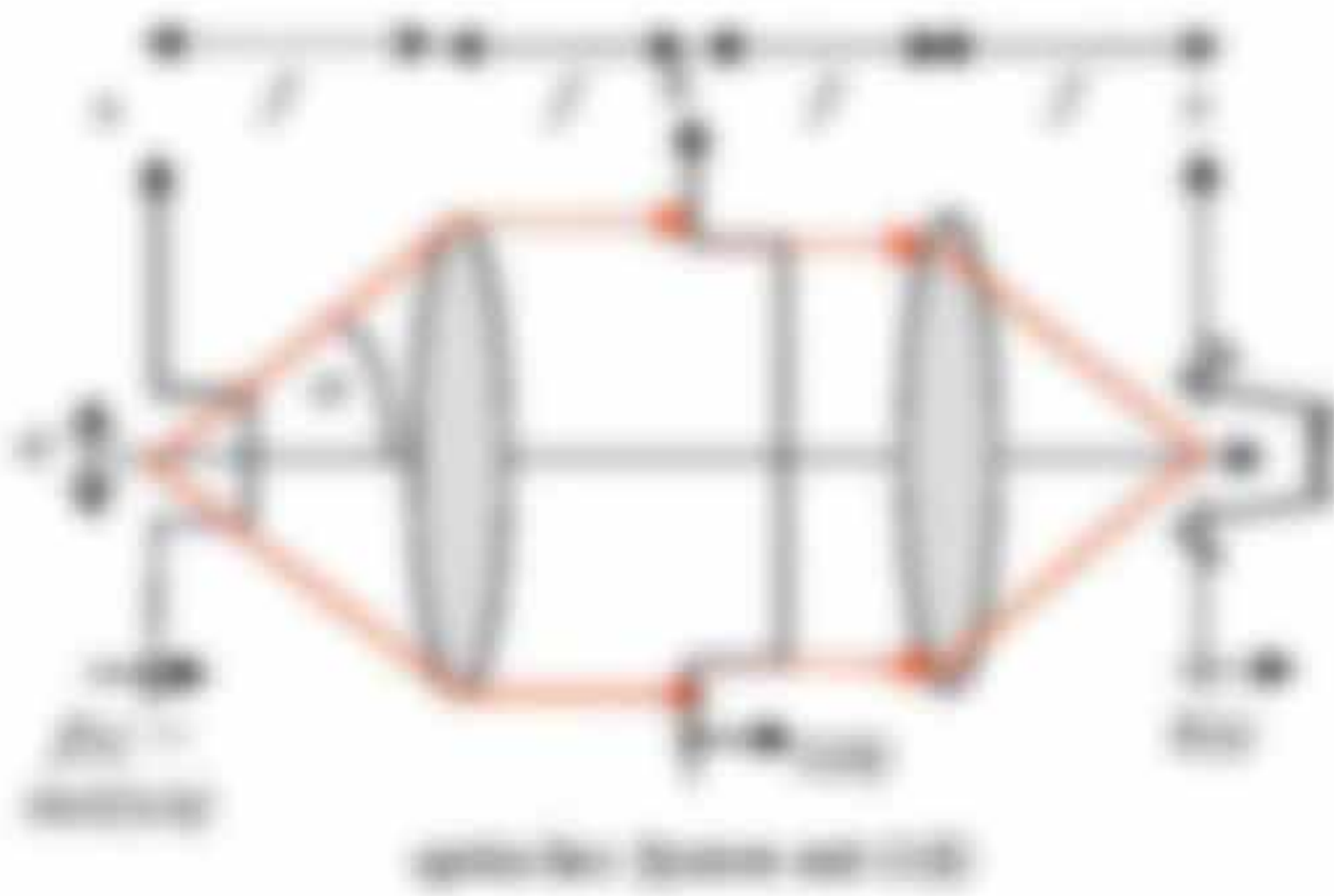
bzw. nach Fouriertransformation: $Z(\omega) = F(z(x)) = U(\omega)$ (0.21)

$U(\omega)$ ist die Übertragungsfunktion (Transferfunktion, TF) des Systems. Sie ist i.d. Regel komplexwertig.

Typisches Beispiel aus der Optik

Die Übertragungsfunktion $U(\omega)$ ist ein Teilprodukt und ist u.a. durch die numerische Apertur NA = Winkel der Linse bestimmt (Auswahlbereich des Frequenz ω im Bild)

$$U(\omega) = \text{sinc}(\omega b) \quad (0.22)$$



$$U(\omega) = \text{sinc}(\omega b) = \frac{\sin(\omega b)}{\omega b}$$

Winkel ω = Winkel
Auswahlbereich des Frequenz

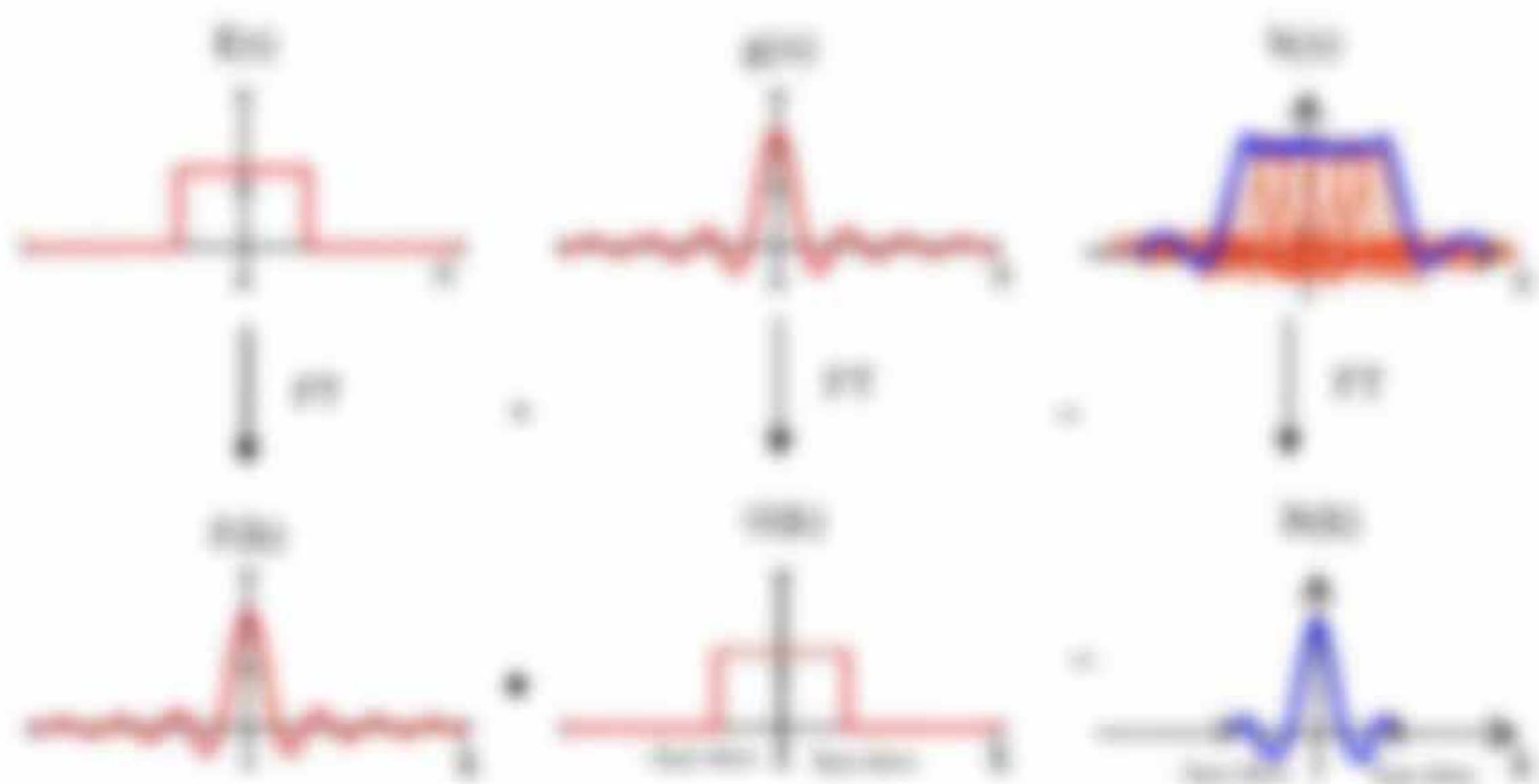
Bestimmung der Transferfunktion $U(\omega)$ des optischen Systems unter Verwendung der Fourieroptik (Bild-Abgleichung zum Abstand $z = 2f$ (Bild))

Das unverschobene Bild $z(x)$ des Rechtecks $z(x')$ ergibt sich:

im Ortsraum $z(x) = \text{sinc}(x/b) = U(\omega) = \text{sinc}(\omega b)$ (0.23)

im Frequenzraum $Z(\omega) = \text{sinc}(\omega b) = U(\omega) = \text{sinc}(\omega b)$ (0.24)

Die Nachbildefunktion $(\mathcal{H}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi$ ist die Übertragungsfunktion für den Fall 2 und stellt also ein Tiefpassfilter!



Wirkung des idealen Tiefpassfilters: Diese Filter fängt die Frequenzen für die die Durchlaufzeit gut, wenn keine Mehrfachen der Eingangsform für die mit der Durchlaufzeit ω , wenn die Frequenzen $\omega > \omega_c$ sind, werden verworfen.

Reelles Grenzwertverhalten der Faltung

Jede Funktion, die genügend hoch mit sich selbst gefaltet wird, ergibt eine immer weitere Funktion, welche fast in einer Gaußfunktion konvergiert.

$$\delta(x) * \delta(x) * \delta(x) * \delta(x) * \delta(x) * \dots = \delta(x) \quad (1)$$



Wirkung des reellen Grenzwertverhaltens.

Aufgabe 10 ist die Übertragungsfunktion für die ideale $\mathcal{H}(\xi) = \delta(\xi)$ wichtig, welche sich jedoch nicht (1) durch Quadratur aus der Amplitudenfunktion gut ergibt.

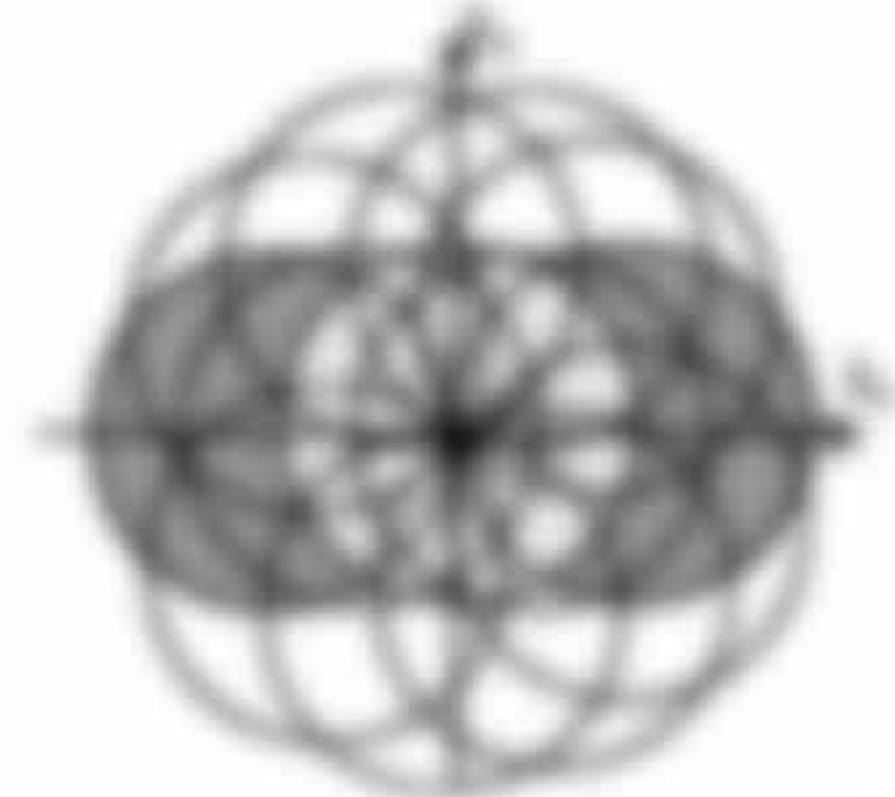
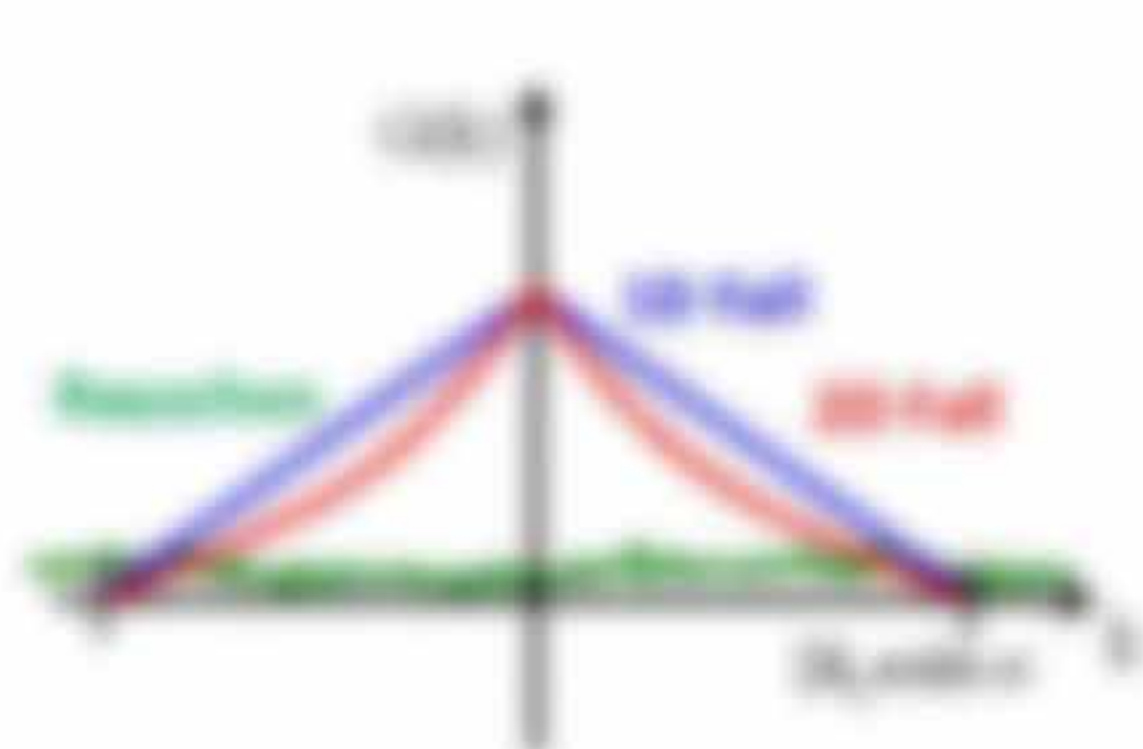
Reelles Grenzwertverhalten	$\mathcal{H}(\xi)$	$\mathcal{H}(\xi)$
Reelles Grenzwertverhalten	$\delta(\xi)$	$\delta(\xi)$
Übertragungsfunktion	$\delta(\xi)$	$\delta(\xi) + \delta(\xi) + \delta(\xi) + \dots$

(siehe immer stochastische Theorie)

In der Optik werden verschiedene Übertragungsfunktionen und die Grenzfunktion und die ZSF-Funktion:

$$H_{\perp}(f) = H \left(\frac{1 - \cos(\pi \lambda f d)}{1 + \cos(\pi \lambda f d)} \right) \quad \text{ZSF-Fkt.} \quad \text{S. 40}$$

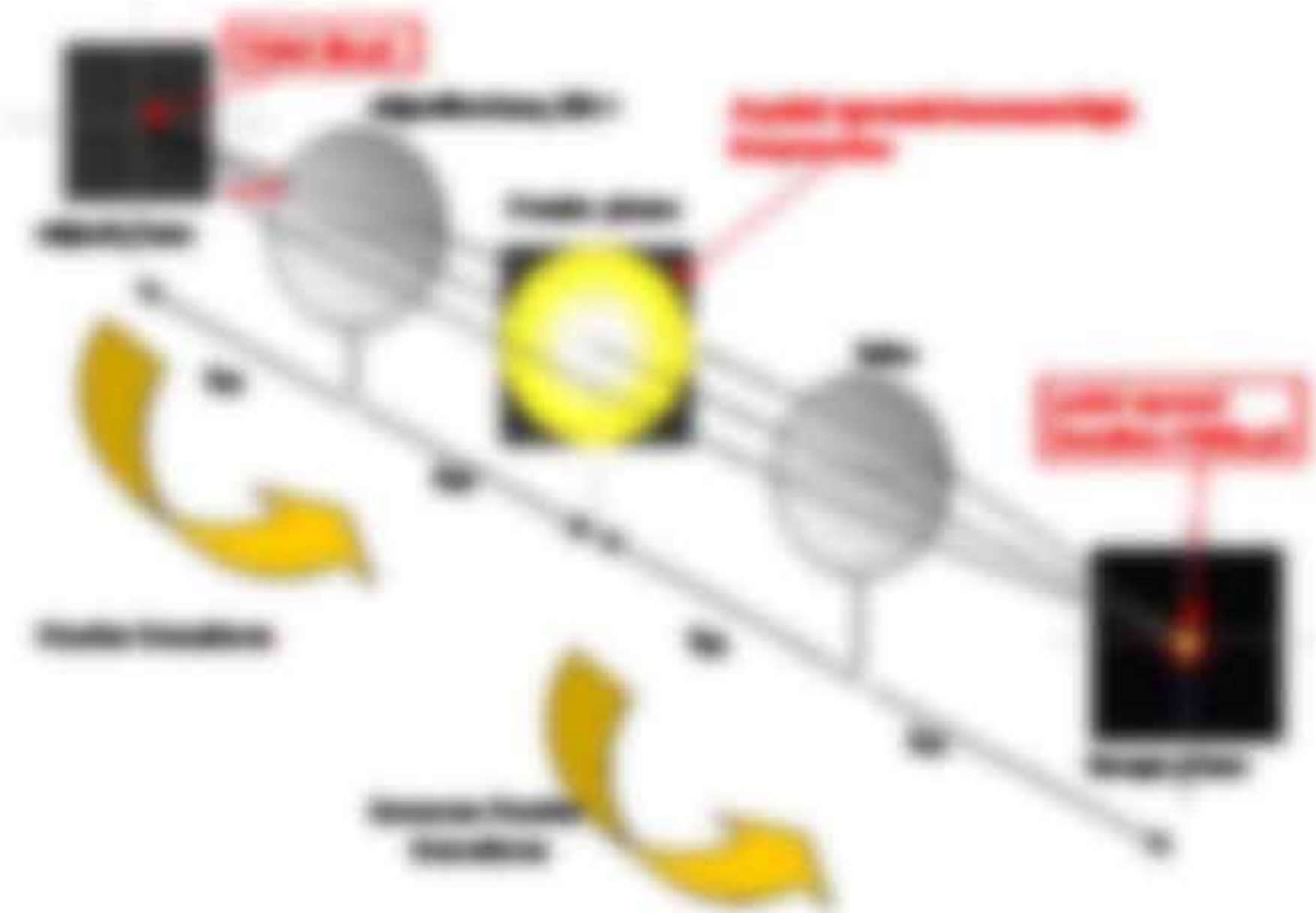
$$H_{\parallel}(f) = H \left(\frac{1 - \cos(\pi \lambda f d)}{1 + \cos(\pi \lambda f d)} \right) \quad \text{ZSF-Fkt.} \quad \text{S. 40}$$



Bemerkung 10: Invariantübertragungsfunktion: Eine Abbildung der Grenzfunktion mit $\cos(\pi \lambda f d)$ und der Grenzfunktion mit $\cos(\pi \lambda f d)$ werden verwendet, wenn mehrere Wellen, benachbarte Wellenlängen überlagert werden, um das Verhalten des Systems, das die Wellen überträgt, zu untersuchen.

Erklärung: Bei der Invariantübertragungsfunktion werden hohe Frequenzen zunehmend schlechter übertragen. Bei $d = 2\lambda$ (zwei Grenzwellenlängen) wird nichts mehr übertragen! Bei vielen optischen Systemen hat die Übertragungsfunktion die Form eines durchgehenden Grenzwertes (Grenzfunktion: low-pass function), welche sich aus dem Querschnittsprofil nach Faltung zweier Sinusfunktionen ergibt.

Erzeugung einer Lichtfaser bzw. einer Punktstrahlfunktion im 4f System:



Bemerkung 11: Objektiv mit Grenzfunktion über $\cos(\pi \lambda f d)$ der Fourier- bzw. Filter- bzw. Punktstrahlfunktion über $\cos(\pi \lambda f d)$ und der Grenzfunktion, um die Punktstrahlfunktion zu erzeugen, wenn mehrere Wellenlängen überlagert werden.

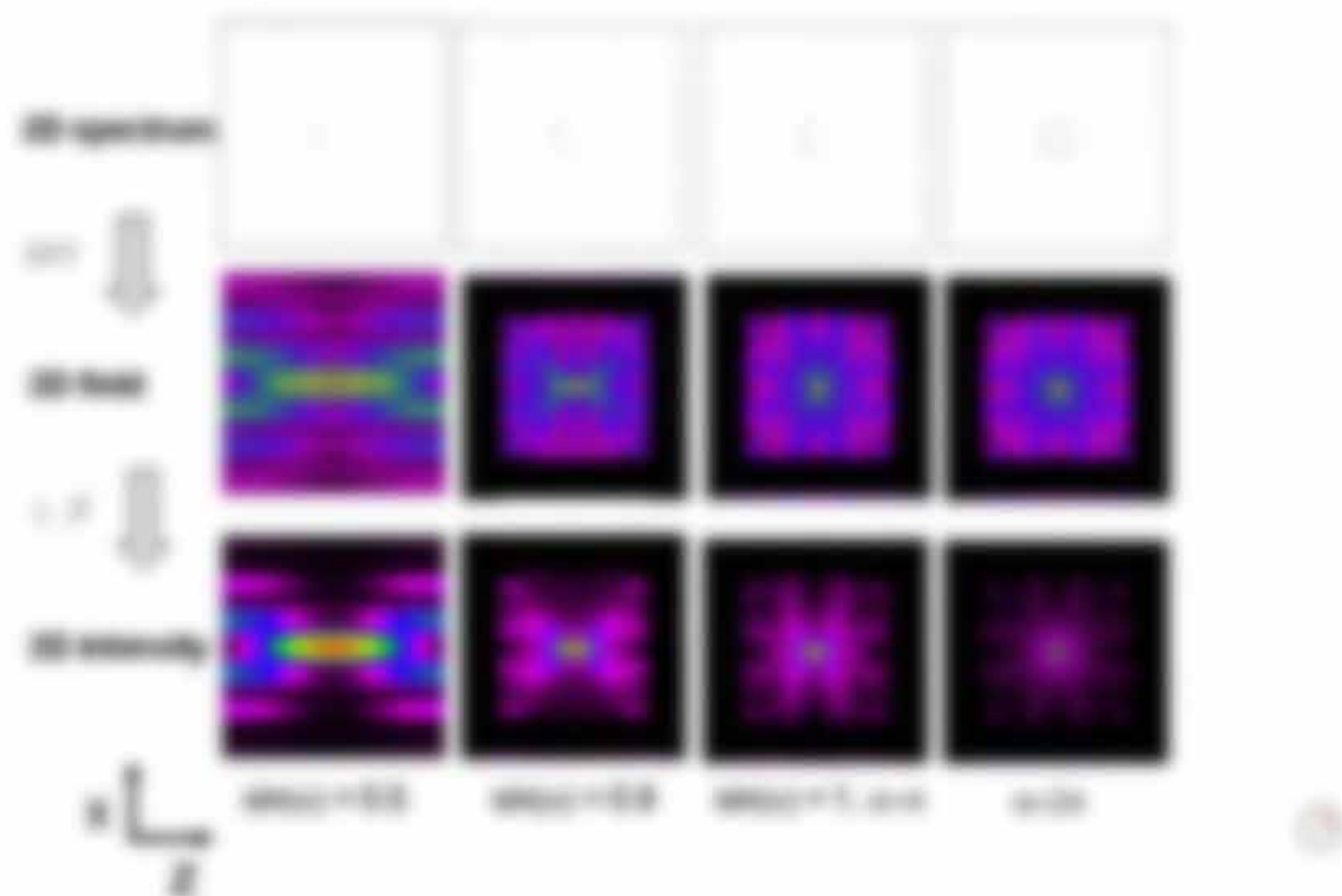


Abbildung 10.10: Die vier Grundtypen der Filterung im Frequenzraum. In jedem Bild sind ein reelles Bild und sein zugehöriges Amplitudengangsbild dargestellt. Die rechte Spalte zeigt die Amplitudengangsbilder der Filter, die in der linken Spalte verwendet werden. Die Filterung im Frequenzraum ist äquivalent zur Filterung im Ortsraum.

1.4. Raumfrequenzfilterung

Wie schon bei den Filtern werden bestimmte Frequenzen heraus oder rein gelassen bzw. gar nicht übertragen. Ein einfaches Beispiel ist hier das Auge (bzw. das menschliche Auge) als optischer Hochpassfilter.

(10) ein menschliches Auge mit Pupillendurchmesser D , groß geöffnet

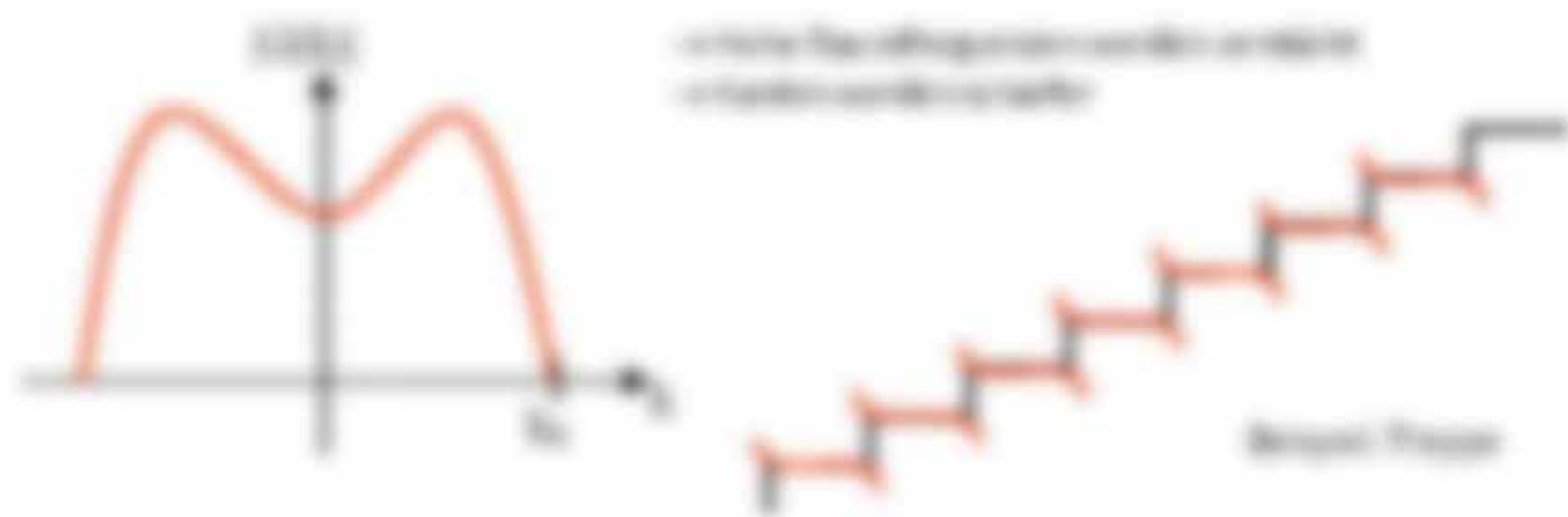


Abbildung 10.11: Die optische Übertragungsfunktion des Auges. Die rechte Seite zeigt die diskretisierte Übertragungsfunktion, die durch die Abtastfrequenz des Auges entsteht.

Siehe auch Filterungsgesamtheit 1

Bei Erweiterung (weiter und nicht alle optischen Systeme diff invariant, so dass dann das Konzept von Faltung und Transferfunktion nicht verwendet werden kann. Falls ein optisches System aber diff invariant ist, so ist „Inverse Filterung“ möglich!

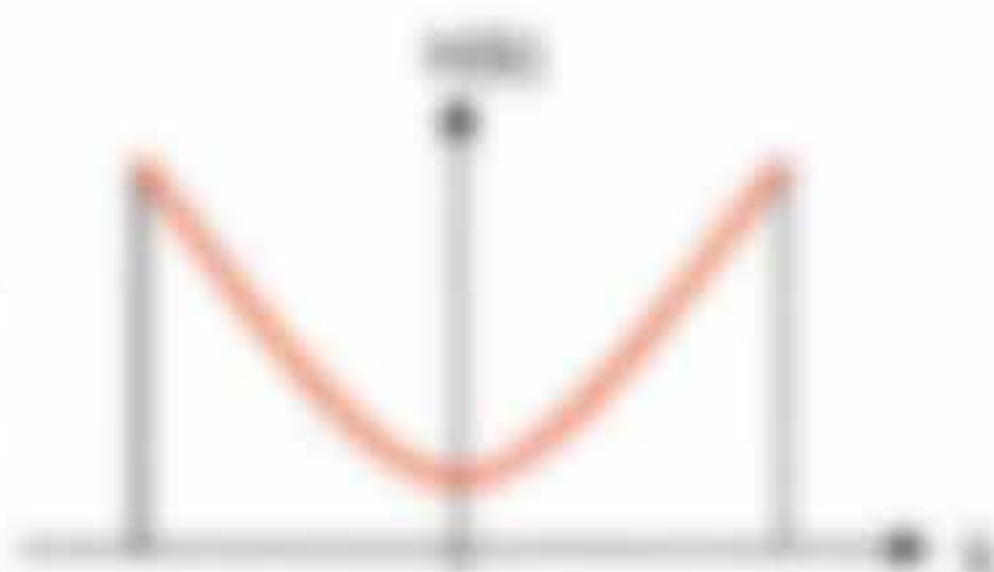
Inverse Filterung und Entzerrung

Das Eingangsprodukt für kein folgendermaßen zurückgewonnen werden:

$$F(u,v) = \frac{H(u,v)}{G(u,v)} \cdot \frac{H(u,v)}{H(u,v) + \epsilon} \rightarrow F(u,v) = \frac{H(u,v)}{H(u,v) + \epsilon} \quad (2.46)$$

Transferfunktion von Obj.
 Abtastwert, für $\epsilon > 0$

Man spricht von einer Entzerrung (engl. Deconvolution) der Filter $H(u,v) = \frac{1}{G(u,v)}$ wird auf $H(u,v)$ multipliziert um die Eingangsstruktur zu erhalten!



Beziehung zu den Inverse Filterung (Entzerrung) ist eine Entzerrung der versch. Frequenzen.

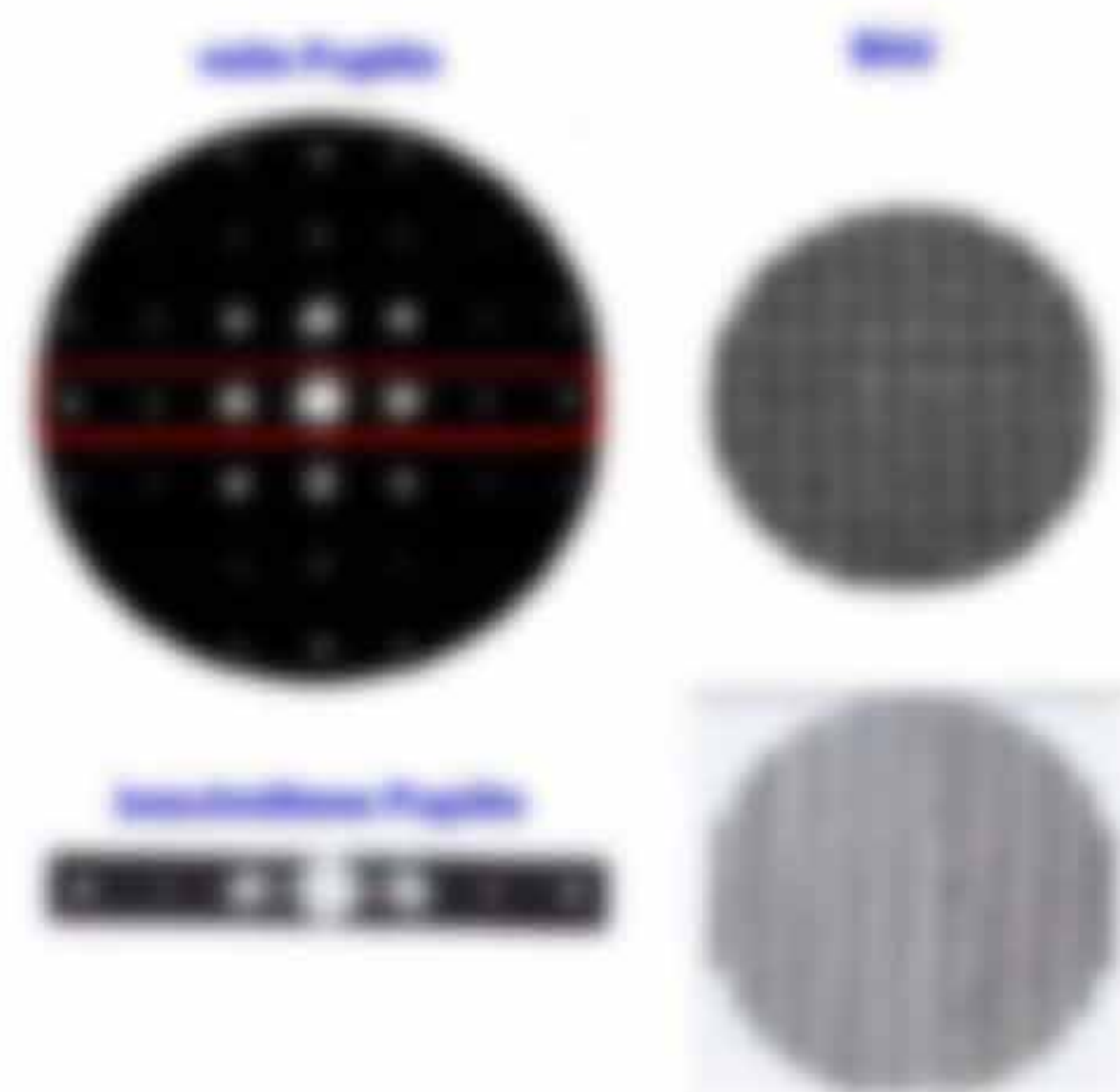
Bei Anwesenheit von Rauschen etc wird die eine schwächere Wiener-Filter zur Entzerrung von $H(u,v) = \frac{1}{G(u,v) + \epsilon}$ verwendet.

Erzeugung periodischer Streifen

Das Eingangsprodukt bzw. Bild $f(x,y)$ wird Fourier transformiert zu $F(u,v)$, und dann mit einer Modulatorfunktion $M(u,v)$ multipliziert bzw. physikalisch beschrieben (Spalt im Strahlengang, zwei Spalte im Strahlengang) und man erhält das gefilterte Bild

$$F(u,v) \cdot M(u,v) = H(u,v)$$

Beziehung zu Filterung des Strahlengitters zum Strahlengitter (Quelle: Korte)



Siehe auch Verknüpfungsgesamtheit mit ideal deformierbarem Objekt, welches teilweise deformiert wird.

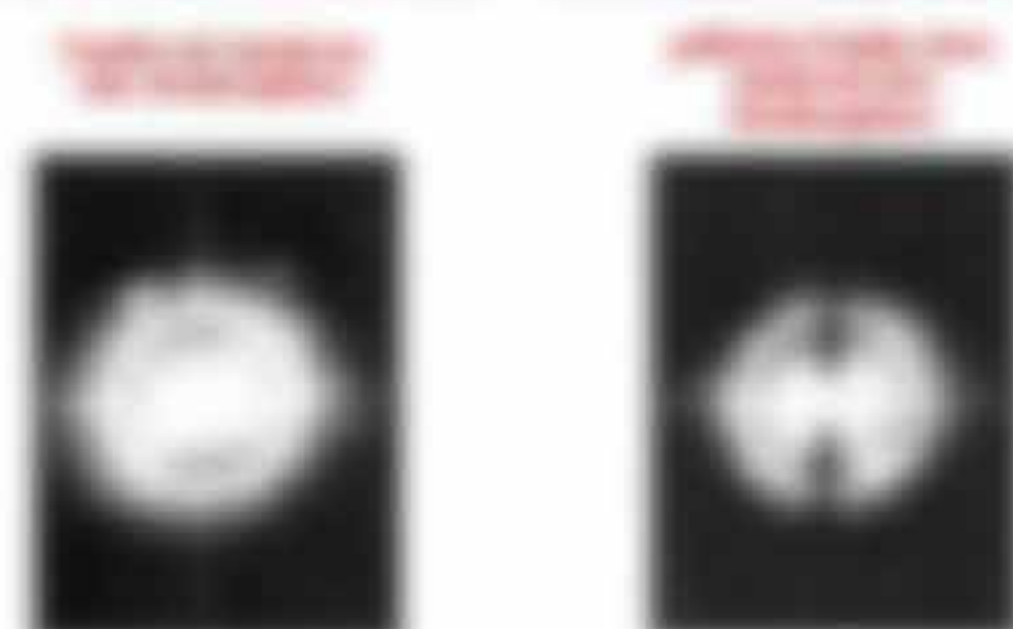
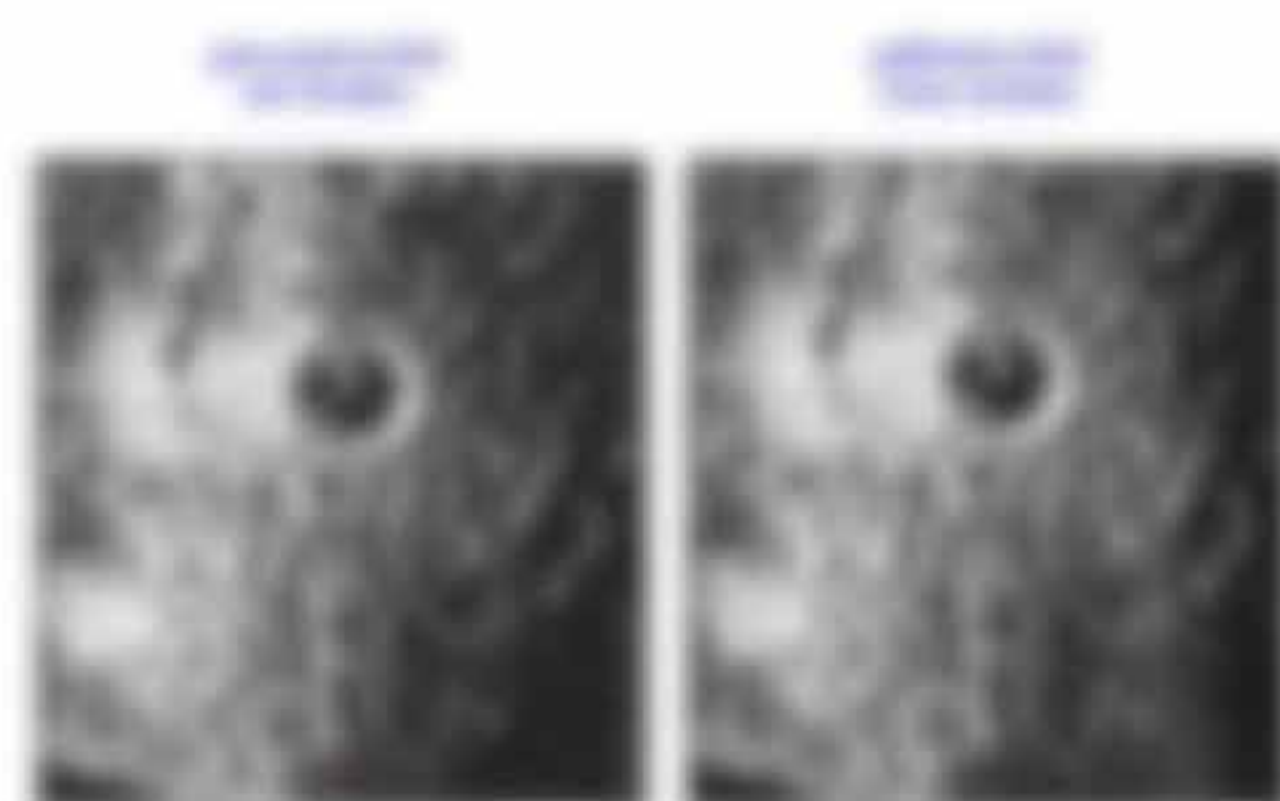


Abbildung 21: Veranschaulichung der Wirkung der Verknüpfungsgesamtheit (Quelle: [10]).

3.5. Das Abstrahieren

Ein kontinuierliches (analoges) Signal wird mit durch diskrete Abtastwerte (digitalisierter) ohne Informationsverlust dargestellt.

Wichtige Anwendungen: Foto von Monitoren bzw. CCD-Cameras oder 1-bit-Signal auf CD

Das Abstrahieren bzw. Sampling Theorem nach Shannon & Nyquist (1949) lautet:

Eine bandbegrenzte Funktion $f(x)$ (also mit $f(x) = 0$ für $|x| > B_{\max}$) ist durch die Abtastwerte $f(x_i)$ mit $i = 0, 1, 2, \dots, B_{\max}$ vollständig bestimmt bzw. rekonstruierbar ($x_i = \frac{i}{2B_{\max}}$).

Spektraldichtung im Abstand Δ durch Multiplikation mit $\cos(\omega_0 t)$

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

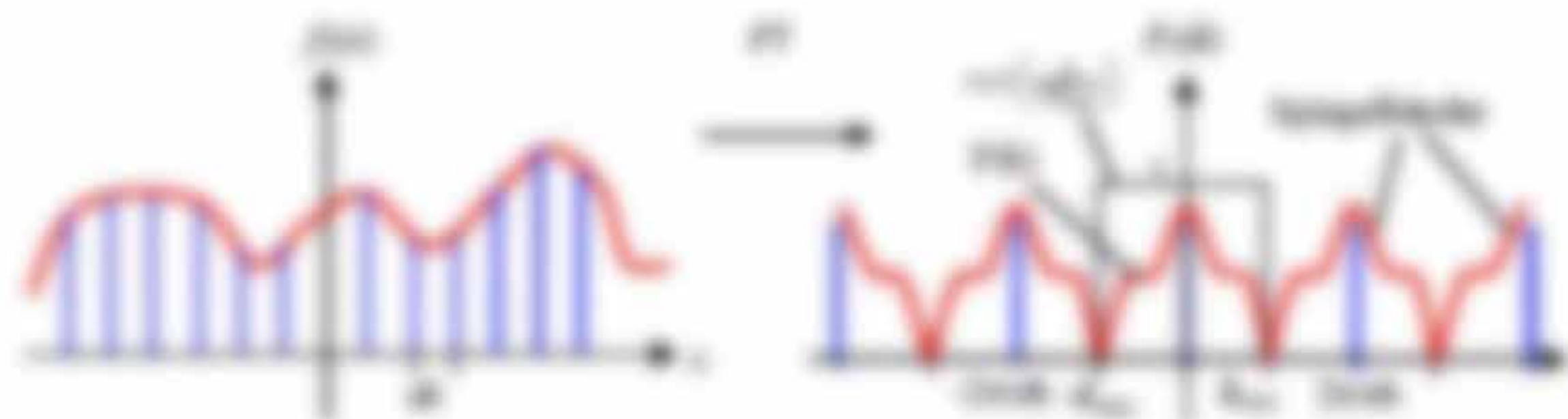


Abbildung 16: Die modulierte Abtastungssignale $f(t) \cos(\omega_0 t)$ in Abstand Δ werden in einer periodischen Fortsetzung des Spektrums $F(\omega)$ in ω -Richtung abgebildet in den Frequenzbereich in Abstand ω_0 .

Es folgt ein neues Frequenzband von $F(\omega)$ heraus: $F(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$

und transformieren das verbleibende Spektrum $F(\omega)$ zurück, wobei $\Delta = 2\Delta\omega_0$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]\right\} \quad (2.45)$$

$$= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - k\Delta) \cos(\omega_0 k\Delta)$$

In jedem Taktwert der Funktion $f(t)$ wird also eine von $f(t)$ kopierte Funktion kopiert, so dass sich $f(t)$ komplett rekonstruieren lässt, wenn Δ klein genug ist. Die Rekonstruktion entspricht dem Schema:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - k\Delta) \cos(\omega_0 k\Delta) \quad (2.46)$$

Eq. (2.46) bedeutet, dass mit $\Delta f(t)$ gemessene (und Δ) Funktionen im Abstand Δ verschoben und überlagert werden.

Bedingung für vollständige Signalrekonstruktion

Wieder mit Verändern der Abtastfrequenz $\Delta\omega_0 = 2\Delta\omega_0$ erhält $\Delta\omega_0$ die maximale Abtastfrequenz. Die maximale Abtastungsperiode ist somit $\Delta = 1/2\Delta\omega_0$.

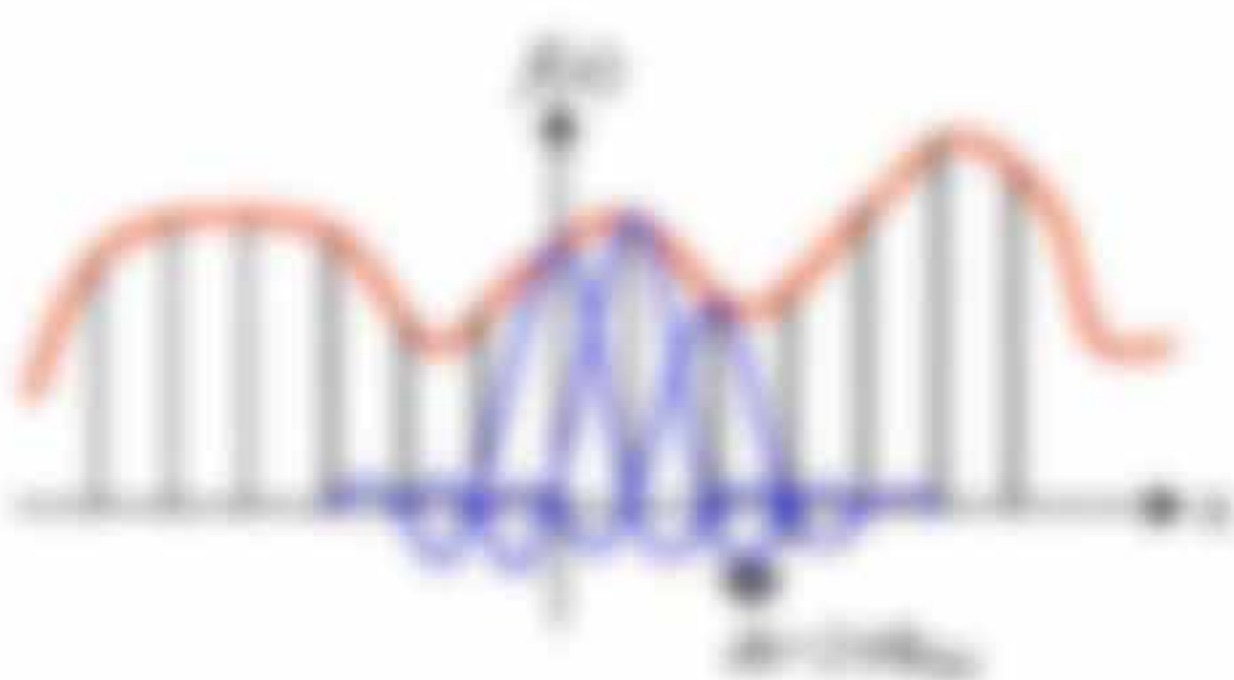
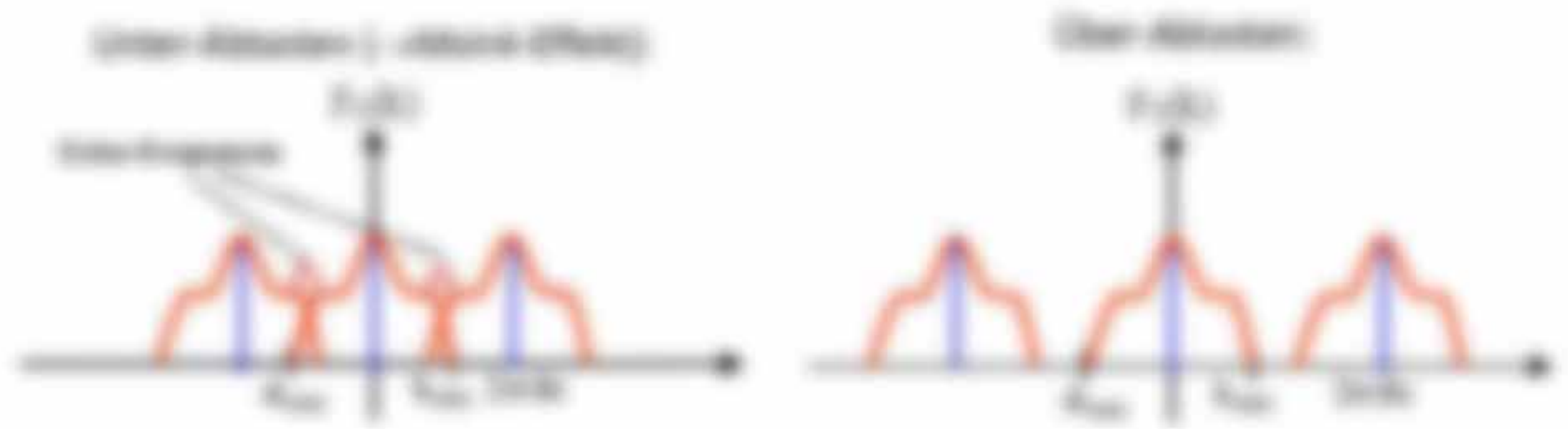


Abbildung 16: Zwei Frequenzbereiche des originalen Frequenzspektrums $F(\omega)$ werden in die ω -Richtung um ω_0 verschoben und überlagert. Die Rekonstruktion erfolgt durch Multiplikation mit $\cos(\omega_0 t)$ und anschließende Integration über ω . Die Rekonstruktion ist nur möglich, wenn Δ klein genug ist, so dass die beiden Frequenzbereiche nicht überlappen.



Aliasing

erzweilen häufig ungewollt, wie z.B. bei der Aufnahme zu hoher Frequenzen mit einer Digitalkamera, können aber auch eine nützliche Methode sein, um z.B. Bildinformationen über $\phi(x)$ zu codieren. Die Decodierung geschieht typischerweise durch Überlagerung mit einem bekannten Filter $\psi(x)$, welches man auf das codierte Filter $\psi(x) \cdot \phi(x) = \psi(x)$ oder $\psi(x) \cdot \phi(x) = \psi(x) \cdot \phi(x)$ anwendet.

$$\psi(x, y) = \cos(\lambda, y - \phi(x)) \text{ und } \psi(x, y) = \cos(\lambda, y) \quad (14)$$



Abbildung 10: Aliasing. Links: Originalbild einer kreisförmigen Struktur. Rechts: Die Überlagerung von einem einem kreisförmigen Muster (a) mit einer Überlagerung mit einem kreisförmigen Muster (b) ergibt kreisförmige Muster (c).

Skizze von Abkühlkurven

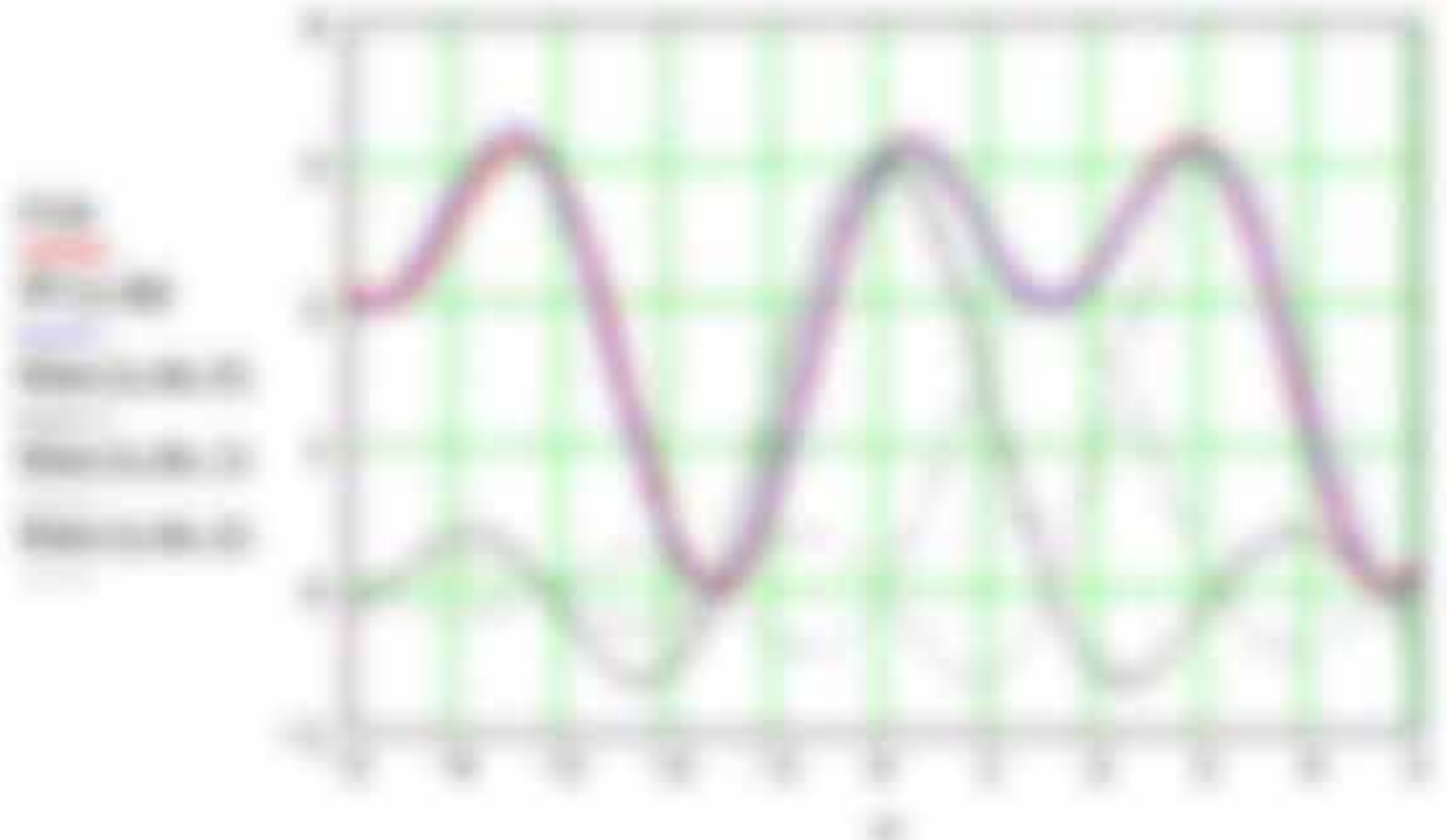
Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$ (in $^\circ\text{C}$) aus gezeigten Summe von zwei Funktionen f_1 und f_2

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x < 0 \\ f_2(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Beispiel: $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \cos(x)$ **Skizze:** $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

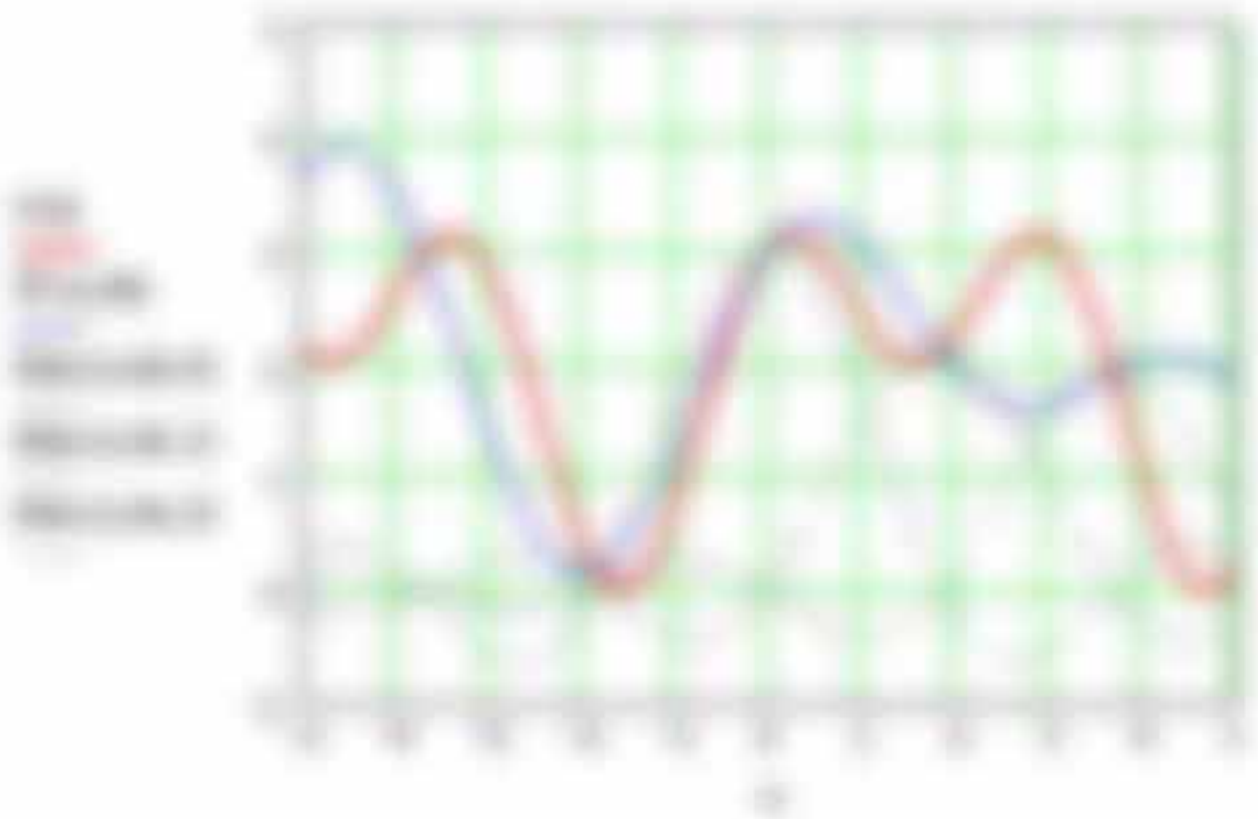
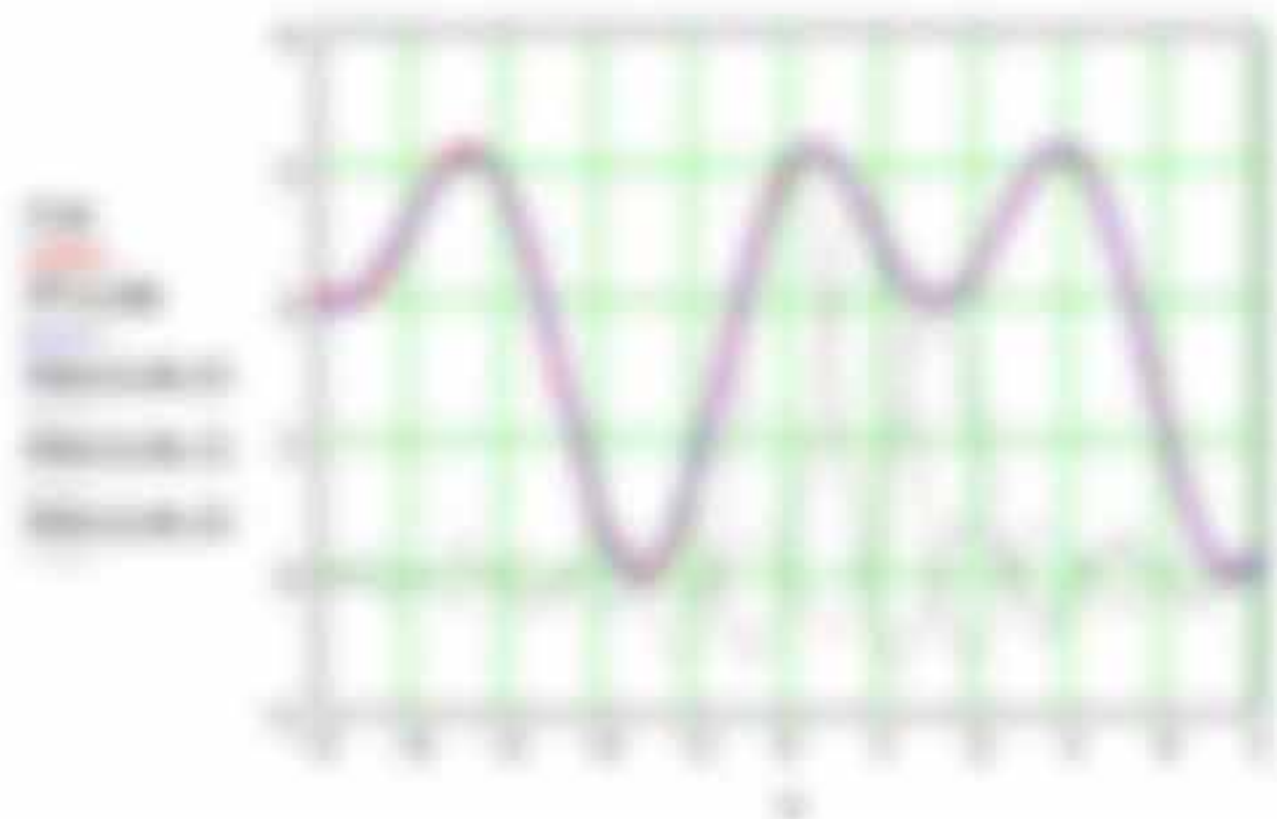
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{Skizze: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Skizze: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Skizze $f(x)$ (in $^\circ\text{C}$) aus $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \cos(x)$. Die Skizze zeigt die Summe $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ (in $^\circ\text{C}$) für $x \in [-1, 1]$.

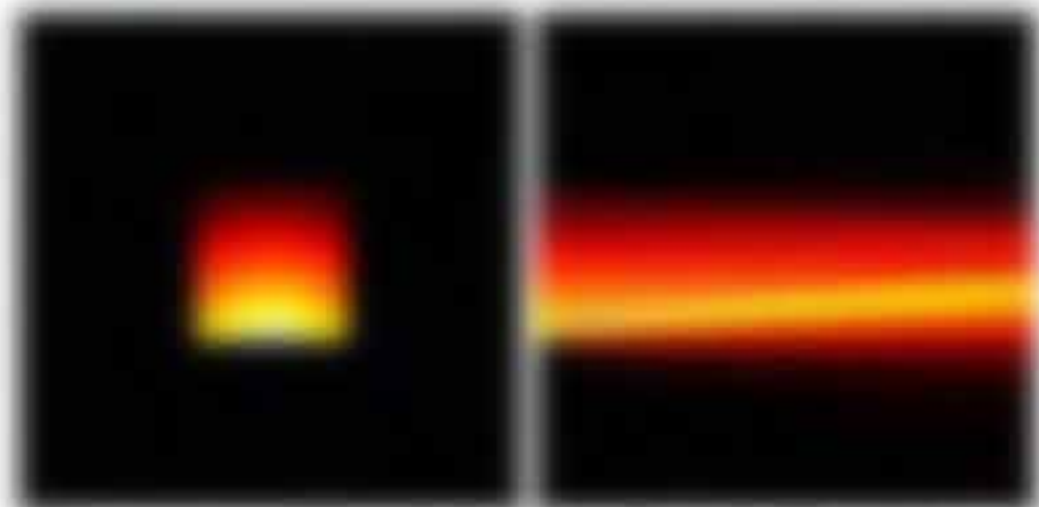
Skizze: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **Skizze:** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Skizze $f(x)$ (in $^\circ\text{C}$) aus $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \cos(x)$. Die Skizze zeigt die Summe $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ (in $^\circ\text{C}$) für $x \in [-1, 1]$.

4. Wellenoptische Lichtausbreitung und Beugung

- Beugung tritt jeden Meter auf, wenn Licht auf ein Hindernis trifft. Amplitude und Phase ändern sich und die Wellen nehmen eine neue Form, die sich mit jedem Wellenmeter Ausbreitung verändert. Hierbei interferieren einzelne Teilwellen und bilden neue Wellen.
- Ändern sich bei der Ausbreitung die Phase, muss sich die Amplitude mit ändern und umgekehrt.
- Dieser geometrische und wellenmechanische, Beugung und Interferenz zeigen aber großen Nachspruch zu unterscheiden, jedoch spricht man meist von Beugung, wenn das Spektrum der Wellenlängen, welche hauptsächlich verstreut auf der Wellenfront stehen, sich nach Auftreffen auf ein Hindernis umverteilt. Bei einer reinen Umverteilung, die ohne keine Absorption erfolgt, geht auch keine Information verloren.



Beugungsgitter in verschiedenen Orientierungen

4.1. Paraxiale Lichtausbreitung durch Gaußsche Strahlen

Das Konzept der Gaußstrahlen erwies sich als sehr praktisch im Alltag, da man viele Probleme wellenoptisch lösen kann, ohne komplexe Berechnungen zu müssen. Allerdings funktioniert dies nur paraxial und falls keine Blenden der Gaußstrahlen beschreiben.

Paraxial lässt sich formal, d.h. 2. Ordnung bzw. Strahlen laufen unter Winkeln $\alpha \ll \pi/2$ und $\alpha \ll \pi/2$ zur optischen Achse. Für starke Fokussierung der Wellen ($\alpha \approx \pi/2$) führt die Ableitung zu fehlerhaften Resultaten.

Der einfachste beschreibende Ansatz wäre
$$E(x) = A(x) e^{ikx} \quad (4.1)$$

Wobei die Form der Phase $k(x) = k_0$ der geraden Wellen (vgl. ebene Wellen) ändert sich nicht, weshalb nur dieser Ansatz erweitert werden muss, d.h. die Amplitude A komplex werden muss. Hierbei soll sich auch die Entwicklung der Wellen $A(x)$ in x nur leicht pro Ausbreitung x ändern, sodass

$$\frac{dA}{dx} \ll \frac{A}{x} \text{ bzw. } \frac{dA}{dx} \ll k A \Rightarrow \frac{d^2 A}{dx^2} \ll k^2 A$$

(vgl. 2. Ordnung in der (4.1))

Einsetzen von (4.1) in die Helmholtzgleichung $(\Delta + k^2)E(x) = (\Delta + k^2)A(x)e^{ikx} = 0$

¹ die geometrische Wellenoptik (Helmholtzgleichung) liefert eine Näherungslösung der wellenmechanischen Helmholtzgleichung, falls sich die Wellenfront über die Ausbreitungsrichtung hinweg als kugelförmig darstellen lässt. Die Lösung lautet dann

$$E \approx \frac{1}{\sqrt{r}} e^{ikr} \approx \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i(kr - \pi/2)}$$



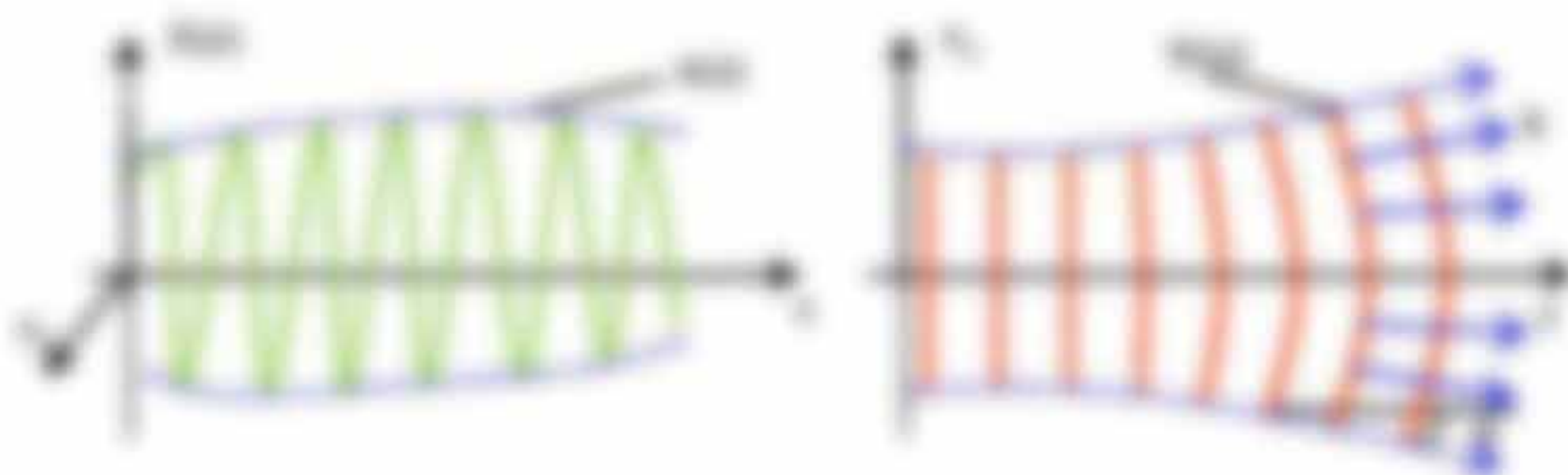


Abbildung 10: Darstellung einer parallelen Wellenbewegung x und deren Amplitude $A(x,t)$ mit Superposition der Wellenbewegungen $\psi(x,t)$ und $\psi^*(x,t)$ sowie deren Amplitude $A(x,t)$.

Es gilt mit $x = x_0 + \Delta x$
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(kx_0 - \omega t_0)} \right) dx_0$$
 und somit
$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(kx_0 - \omega t_0)} \right) dx_0$$

Man erhält nun die partielle Wellengleichung $\Delta \psi(x,t) = 0$ (10) mit einer Wellen mit periodischer Phase der Länge $\lambda(x) = \frac{2\pi}{k(x)}$ (11) wobei hier $k(x) = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$ ist und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}$ ist. Es ist die Wellenlänge für $\psi(x,t)$ welche sich diese Amplitude $A(x,t)$ um die eine Amplitude $e^{i(kx - \omega t)}$ die Amplitude $e^{-i(kx - \omega t)}$ um $\lambda(x)$ oder die konstante Wellenlänge λ_0 und die lokale periodische Phase $\phi(x,t) = k(x)x - \omega t$ zu geben nicht zusammen, es ist unphysikalisch. Man macht den Trick, eine komplexe Wellenfunktion anzunehmen durch die Table $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) dx$

Der Ansatz der Quaderwellen

erhält man dann über die veränderliche Amplitude $A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) dx$ (12)

Wegen $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$ zerlegt man $\psi(x)$ in Amplitude und Phase über

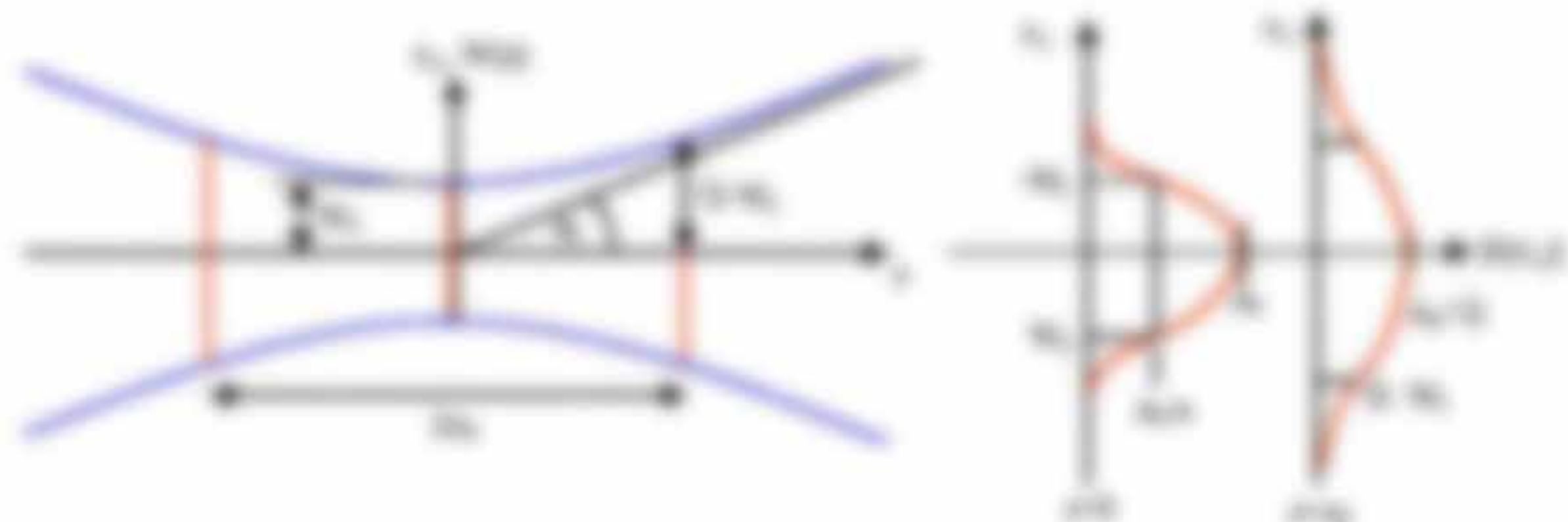
$\frac{1}{\psi(x)} = \frac{1}{A(x)} + i \frac{\phi(x)}{A(x)}$ wobei $A(x) = \left(\frac{1}{\psi(x)} + \frac{1}{\psi^*(x)} \right) \cdot \frac{1}{2}$ (13)

so dass nach (12) die neue, modifizierte Wellen, die immer „klein bleibt“ lautet:

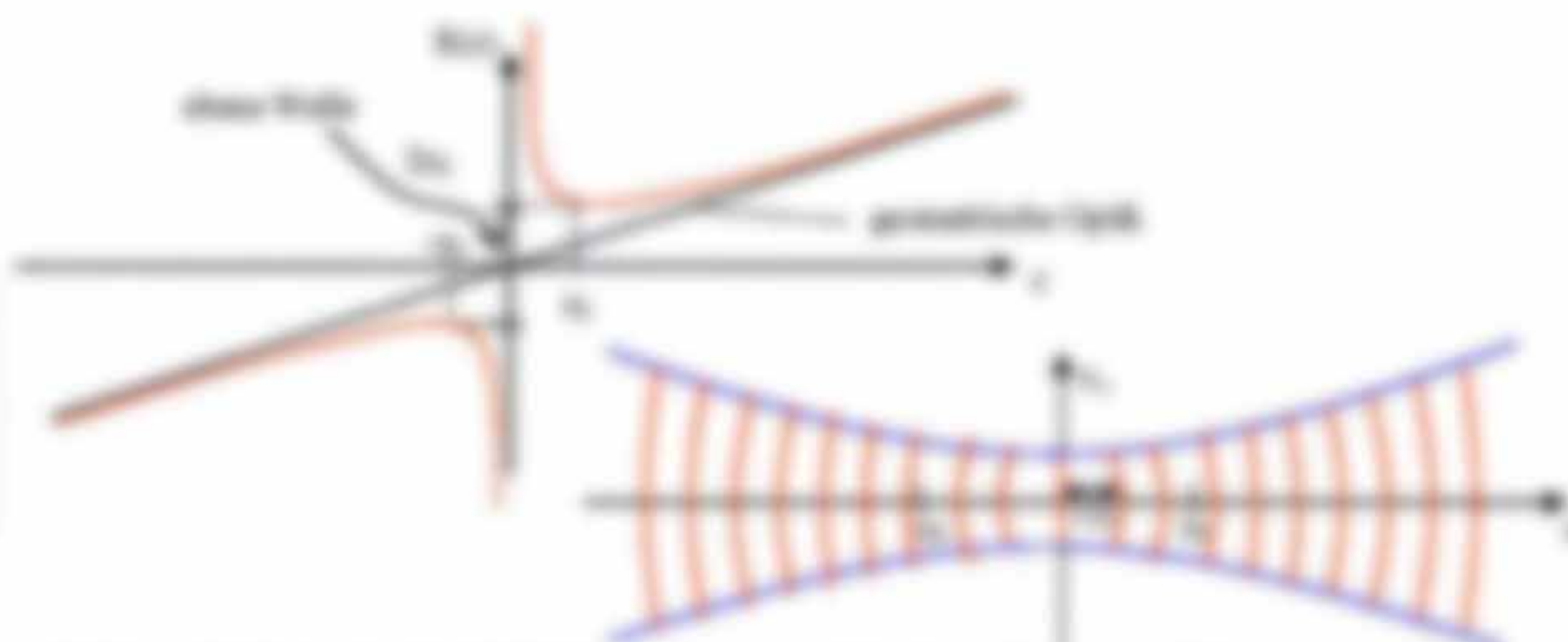
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$
 (14)

Folgende Terme sind wichtig

- **Stützgerade** bzw. **Stützweite** W_1 : die kleinste halbe Breite des Gaußstrahls $W_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \lambda$
- **Stützabstand** W_2 : Abstand zur Entfernung z zu W_1 : $W_2(z) = W_1 \sqrt{1 + (z/\lambda)^2}$ (in Abhängigkeit der Strahlweite, dann schneller divergiert der Strahl)
- **Stützabstand** $L_1 = W_2(z) - z$: Strecke, die zu der Strahlweite W_1 nicht verhalten ist
- **Stützabstand** oder **Verstärkerarm** $L_2 = \frac{z}{W_1} - \frac{W_2}{L_1}$ wird auch als der **Beugungslänge** L gemessen.
- **Stützabstand**, der **Krümmungsradius** $R(z) = \frac{z^2}{2(W_1^2 + z^2)}$ ist bei W_1 unendlich, und verhält sich ab z der geometrischen Krümmungsradius.
- **Stützabstand** und z sind in der **geraden** Ebene $W_1 = z$ und bei **Stützabstand** $W_1 < z$ $L_2 = R - z$ $L_1 = R - z$ $L = R - z$ $R = \frac{z^2}{2(W_1^2 + z^2)}$ $L = \frac{z^2}{2(W_1^2 + z^2)} - z$



Beziehung des Krümmungsradius des Gaußstrahls, Strahlweite



Beziehung des Krümmungsradius des Gaußstrahls, Strahlweite



- **Gaußsche Strahlengänge** Die Phase $\phi(x, z) = \text{const} + i\pi z / \lambda$ ist unabhängig. Die Phase wird im Bereich $(x < x_0)$ als ell geschrieben, ell im Bereich um R_0 , in der Abstand der Wellenlänge λ .

• **Wellenfronten**
$$R_0(x) = R_0 \left(1 - \lambda \frac{d^2}{dz^2} + i\pi \left(-\frac{d^2}{dz^2} \right) \right) \quad (A.1)$$

mit $\lambda = \lambda_0 / n$. Im leeren Bereich $(x < R_0)$ befinden sich ell der Gaußsche Strahlengänge. Die Breite $2R_0(z)$ wird auch als Durchmesser des Strahls bezeichnet. Ein Laserstrahl im TEM₀₀ Modus hat einen sphärischen Wellenfront hat ein Gaußsches Strahlprofil.

Gaußsche Strahlengänge durch eine Linse

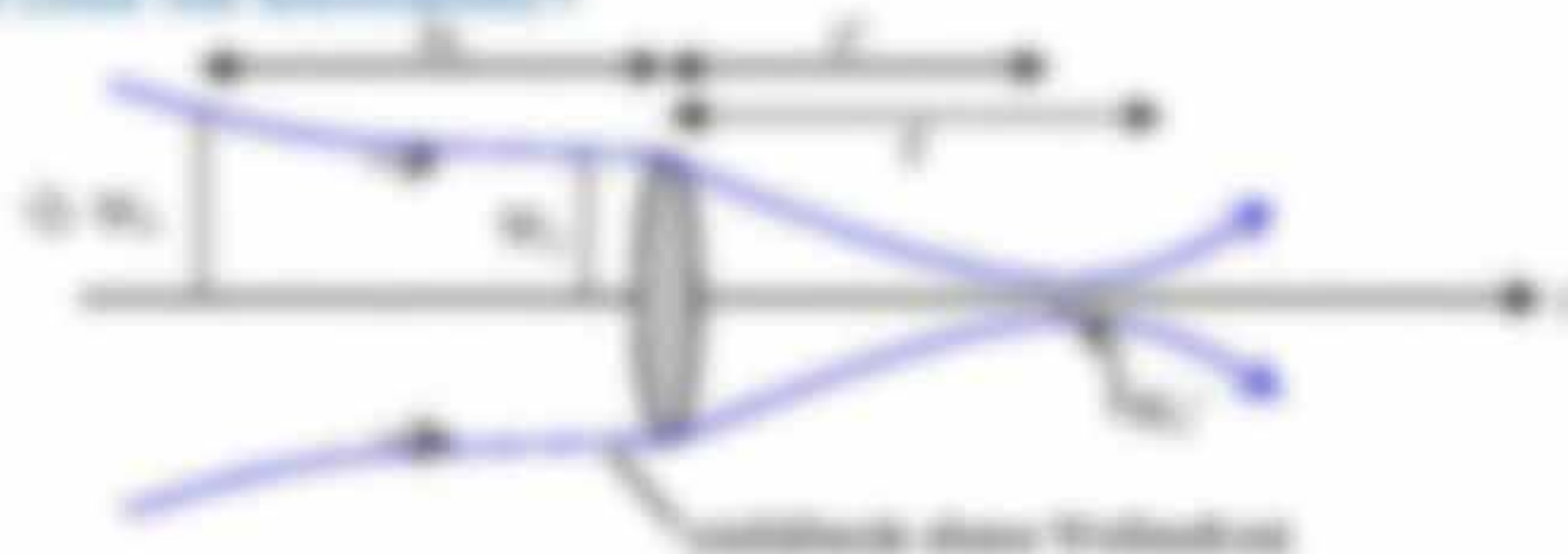


Abbildung 10: Ein Laserstrahl wird durch eine Linse gebrochen.

Nach Durchgang durch eine Linse mit Brennweite f verengen sich der Beam Waist R_0 durch Folgenderung zu

$$R_0' = R_0 / \sqrt{1 - (R_0/f)^2} \quad (A.2)$$

Dabei wandert die Position z' des Beam Waist R_0' , also die Position des hellsten Punktes nach vorne auf

$$z' = \frac{f}{1 + (R_0/f)^2} \quad (A.3)$$

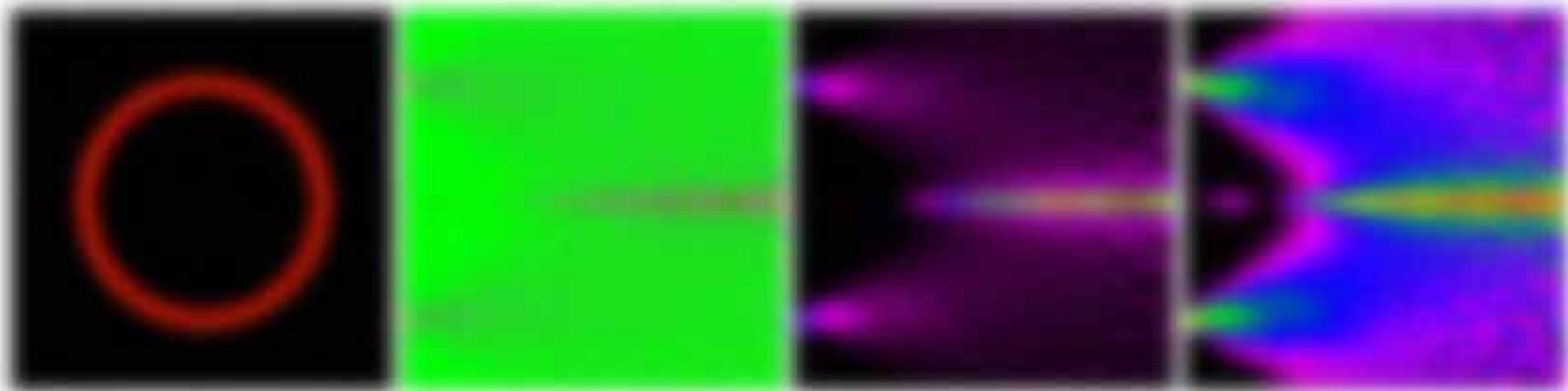
Falls der Strahl nahezu kollimiert ist, also $R_0 \gg f$, dann ist $z' \approx f$ die Brennweite und für die neue Wellenlänge gilt

$$R_0' \approx \frac{1}{2} f \sqrt{1 + (R_0/f)^2} \quad (A.4)$$

Wir halten fest, dass bei diesen Formeln für Nullbrechung die numerische Apertur $NA = n \sin(\alpha) \ll 1$ der Linse nicht eingreift, sondern lediglich ihre Brennweite f .

4.2. Wellenpropagation und Beugung

Wellenoptische Lichtausbreitung unterscheidet sich oft massiv von einer strahlenoptischen Beschreibung, wie folgendes Beispiel der Wellenpropagation hinter einer kreisförmigen Blende illustriert, nach einiger Distanz entsteht nämlich eine Lichtverteilung



entsteht, die nur mittels einer Beugungstheorie, wie Wellenoptik, beschreibbar ist.

Der weltberühmte Christian Huygens schlug 1690 ein bis heute sehr anschauliches Prinzip zur Lichtausbreitung und Beugung von Elementarwellen vor: Innerhalb einer Blendenöffnung entsteht, entlang einer Wellenfront überlagert sich stets neue Elementarwellen, in einem beliebigen Abstand auf einem Schirm ist die resultierende Intensität messbar.

4.2.1. Lichtausbreitung im Frequenzbereich

Quantitativ lassen sich Wellenpropagation und Beugung sehr gut mit der Theorie linearer Systeme beschreiben, im Besonderen mit LSI Systemen.

Nehmen wir an, wir haben zunächst ein stationäres, stationäres, bekanntes Feld $E(x, y, z)$ im $z=0$ Ebene, welches sich durch den homogenen freien Raum in positive z -Richtung ausbreitet (bei ω Frequenz $(k_x, k_y = \sqrt{k^2 - \omega^2})$). Nach Ausbreitung um die Strecke z sieht das Feld anders aus, was heißt, dass das System „freier Raum“ einen Einfluss auf das Feld ausgeübt hat. Dieser ist beschreibbar durch die Amplitudenfunktion bzw. Green'sche Funktion $G(x, y, z)$.

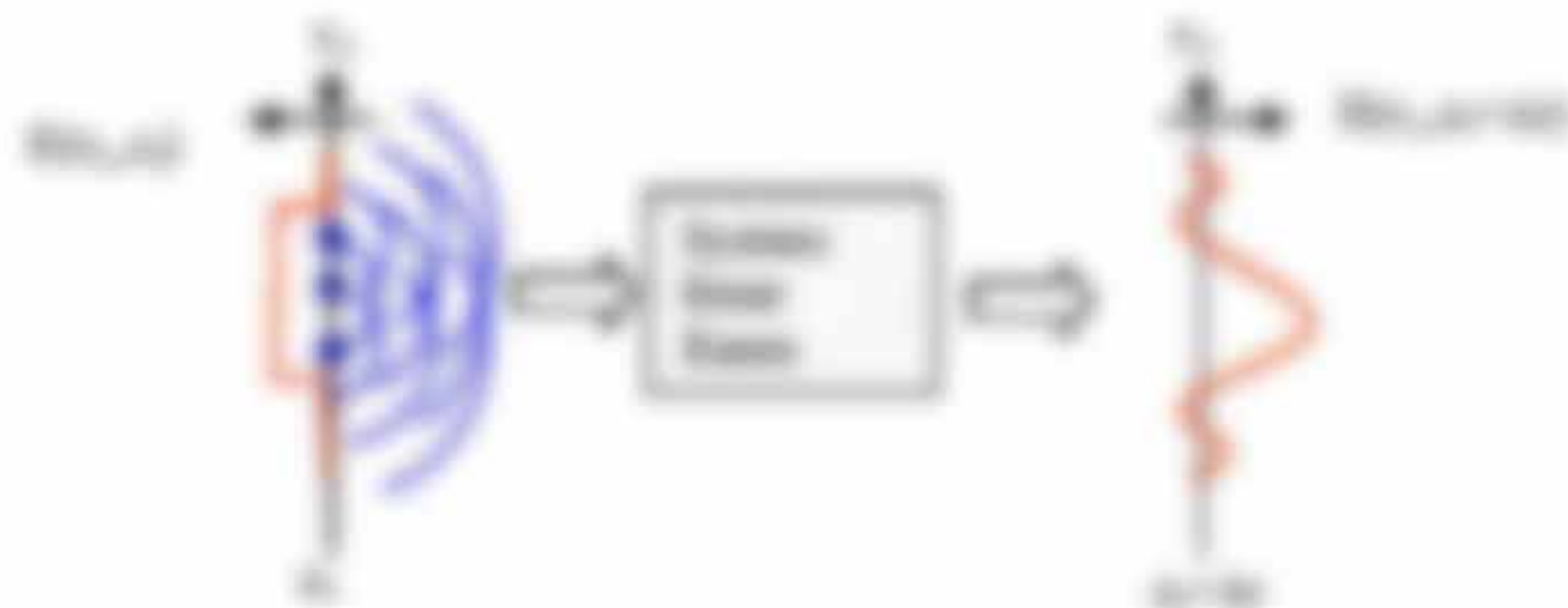


Abbildung 48: Huygens Prinzip der Strahlenausbreitung, die äquivalente Beschreibung $E(x, y, z)$ erzeugt und entsteht aus dem Ausbreitungsfreier Raum um z .

Im beschriebenen linearen Fall entspricht die Elementarwellenüberlagerung einer Faltungsgeneration wie in Abbildung 49 ersichtlich. Für das stationäre Feld gilt:

$$E(x, y, z) = [H(x, y, z) * G(x, y, z)] = E(x, y, z) + G(x, y, z)$$

(4.20)

Statt der Faltung mit der Fourier-Transformierten, der Kugelfunktion $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ im Ortsraum, die man (A.10) abgelesen, im Fourier-Raum durch Multiplikation mit einer Transferfunktion $H(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{h(\mathbf{r}, t)\}$, $H(\mathbf{k}, \omega)$ beschreibt dann die Ausbreitung (Streuung) jeder einzelnen ebener Wellen in Richtung \mathbf{k} bzw. $\omega = \sqrt{c^2 k^2 - \omega_0^2}$ (D.1) und bzw. \mathbf{k}, ω

$$H(\mathbf{k}, \omega) H(\mathbf{k}, \omega) = H(\mathbf{k}, \omega + \omega_0) \quad \text{D.12}$$

Wendet man $H(\mathbf{k}, \omega)$ bzw. $H(\mathbf{k}, \omega)$ im Wellenpaketraum nach Umkehr (2) Fourier-Transformation an x und y bzw. im Ortsraum an x, y ,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{k}, \omega) &= \int \int h(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt \\ H(\mathbf{k}, \omega) &= \int h(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt \end{aligned} \quad \text{D.13}$$

Die Transferfunktion $H(\mathbf{k}, \omega)$ selber ist also die Transferfunktion $H(\mathbf{k}, \omega)$, welche die Änderung der Wellenlänge und phase \mathbf{k} mit $\omega' = \omega - \omega_0$ und \mathbf{k} in Abhängigkeit von der Frequenzänderung ω beschreibt!

Lineare Fourier-Transformation \mathcal{F}_L der Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta)h(\mathbf{r}, t) = 0$ mit $\mathbf{k} = \mathbf{k}, \omega = \omega - \omega_0$ ergibt $(\omega'^2 - c^2 k^2) H(\mathbf{k}, \omega) = 0$

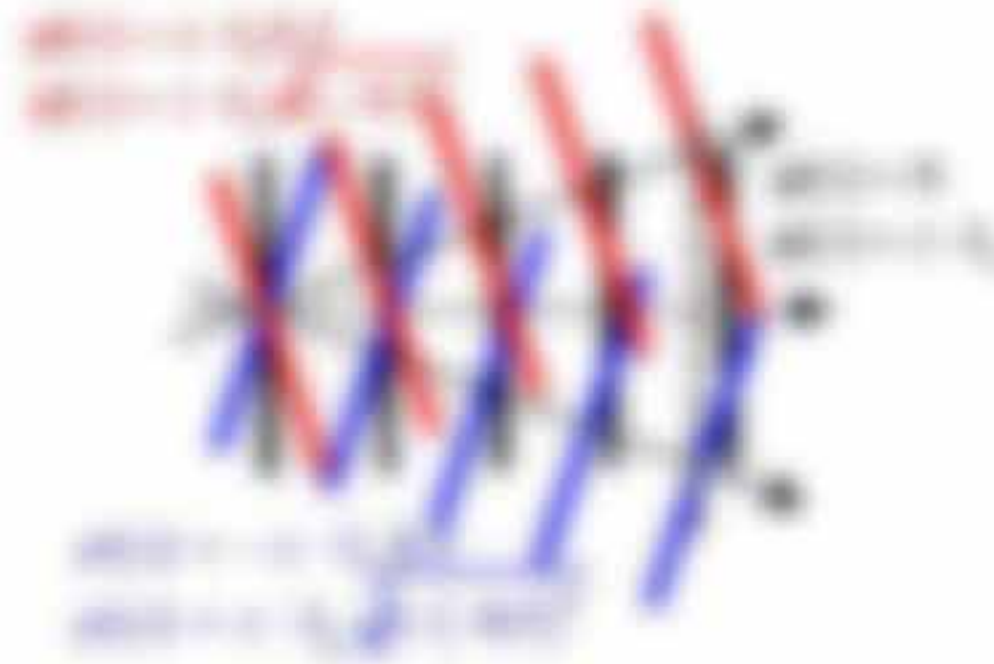
Ein Übergang mit komplexer Wellenzahl \mathbf{k} bzw. $H(\mathbf{k}, \omega) = H(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ mit $\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_0$, wenn $(\omega' - \omega_0)^2 - c^2 k^2 = 0$, wenn die Normer null sind

$$H(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{c^2 k^2 - \omega_0^2} \quad \text{D.14}$$

Ergebnis der Wellen physikalisch nach dispersiven Wellen:

(1) propagierende (transmissiver) Wellen

$$\begin{aligned} \text{mit } \omega' = \omega - \omega_0 &= \omega - \omega_0 + i\sqrt{c^2 k^2 - \omega_0^2} \\ H(\mathbf{k}, \omega) &= H(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad \text{D.15}$$



(2) evaneszente (reflektiver) Wellen

$$\begin{aligned} \text{mit } \omega' = \omega - \omega_0 &= \omega - \omega_0 - i\sqrt{c^2 k^2 - \omega_0^2} \\ H(\mathbf{k}, \omega) &= H(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad \text{D.16}$$

Abbildung 10: Dispersive Wellen im Ortsraum (D.15, D.16)

Die in Eq. (A.12) gezeigte Transferfunktion ist das Fourier Transformierte von

$$H(\omega, \Delta, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (A.13)$$

und beschreibt je nach Vorzeichen des Terms unter der Wurzel gruppenweise und momentane Wellen (siehe Abbildung 10). $H(\omega, \Delta, \Delta)$ lässt sich aufteilen über die Eigenwertentwicklung (Abbildung 10). Der Mittelwert ist verantwortlich für Abbildung 10.

Man erhält also das Mittelwertproblem am Ort $\Delta = 0$, einfach durch Aufmultiplizieren der Transferfunktion mit der gezeigten Ausbreitungsgleichung:

$$H(\omega, \Delta, \Delta = 0) = H(\omega, \Delta, \Delta) H(\omega, \Delta, \Delta)$$

Das gezeigte Feld $H(\omega, \Delta)$ am Ort $\Delta = 0$ erhält man somit durch Nachtransformation:

$$H(\omega, \Delta = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, \Delta, \Delta) e^{i\omega \Delta} d\Delta \quad (A.14)$$

Das gezeigte Feld am Ort $\Delta = 0$ ausgedrückt in x und y lautet

$$H(\omega, \Delta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, \Delta, \Delta) e^{i\omega \Delta} d\Delta = H(\omega, \Delta = 0)$$

und ergibt nach Einsetzen des Mittelwertproblems (A.12) die erweiterte 2D-Feldung

$$H(\omega, \Delta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, \Delta, \Delta) e^{i\omega \Delta} d\Delta = H(\omega, \Delta = 0) \quad (A.15)$$

Eigenwertentwicklung

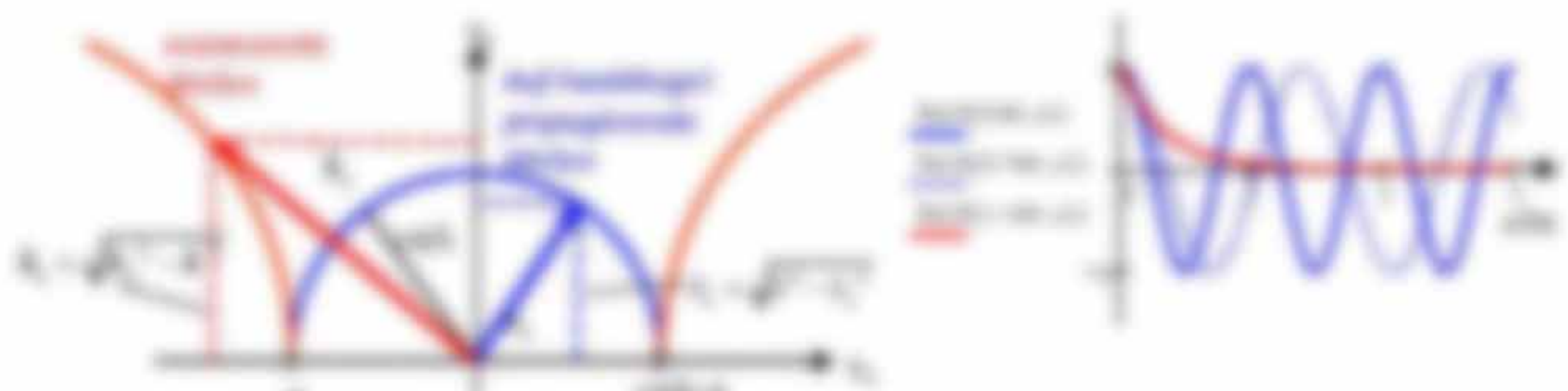


Abbildung 10: Wellenpakete (blau) werden in ebene Wellen (rot) zerlegt. Die momentanen Wellen (rot) werden weiter zerlegt in ebene Wellen (blau) und momentanen Wellen (rot).

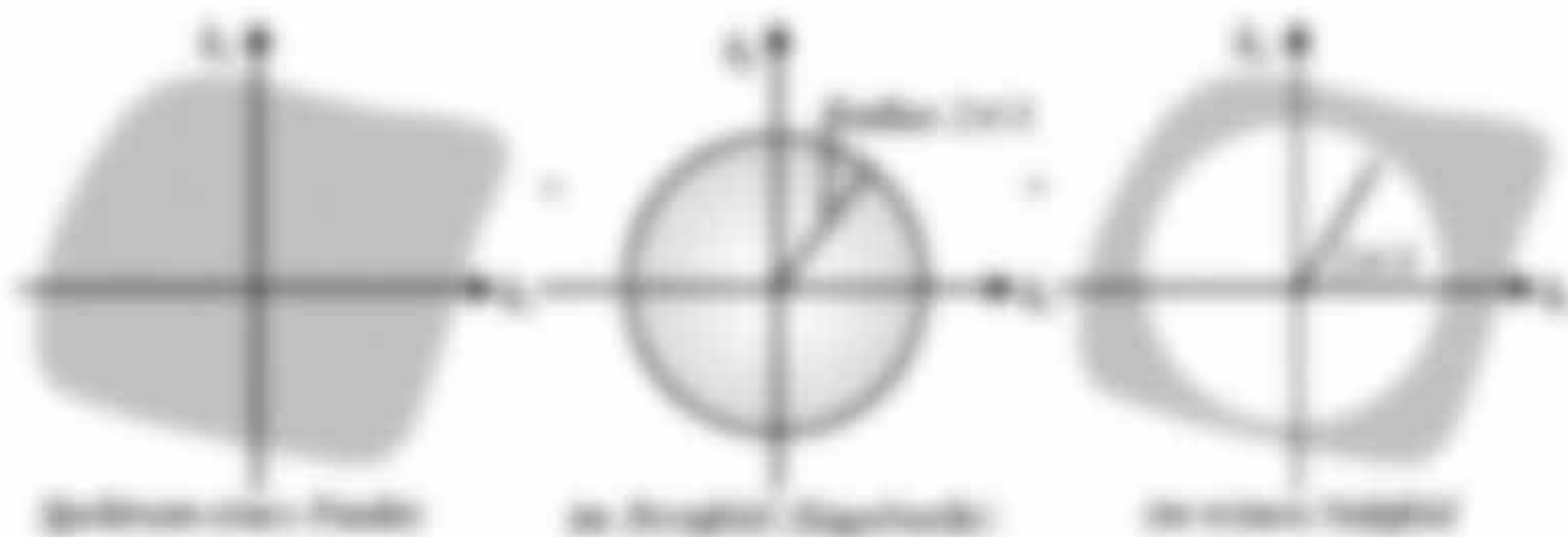
Das Problem: Multiplikation mit der Transferfunktion entspricht einer Filteroperation. Die Filterfunktion $H(\omega, \Delta)$ schwächt alle Raumfrequenzen $k_x = \Delta/\Delta$ ab.

(Wellenbrechung = Tiefpassfilterung)

Um dies zu veranschaulichen, verlagert man die Transformations in zwei Ansätze mit reellen $\mathcal{F} = \text{gruppenwert}$, $\mathcal{F}' = \text{ausgewertet}$

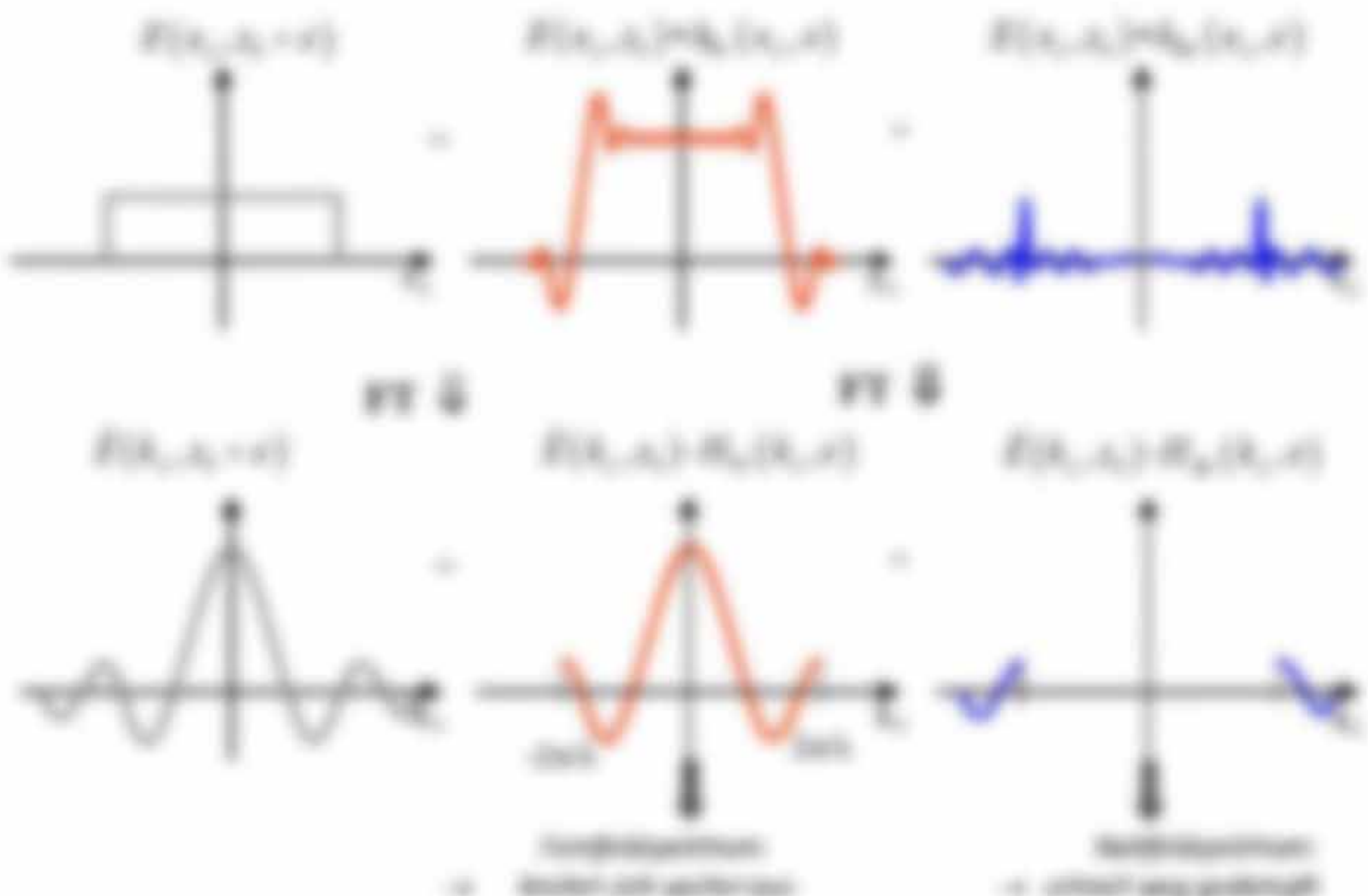
$$R(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = R_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_1) + R_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}_2) = R_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_1) + R_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}_2) \quad (1.20)$$

oder $R(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = R_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_1) + R_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}_2)$ mit $R_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_1) = R_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}_2)$



Beziehung zu Dispersion der Wellenfunktion in den Dispersionen unterschiedlicher Wellen. Wellenfunktion in der k - x Ebene. Dispersion, analog zu 1D Dispersion in Dispersion der Dispersionen und Dispersionen durch den Wellenwert von k (ausgewertete Wellenfunktion) und Dispersionen Wellenfunktion in Gruppenwert.

Beispiel: Wellen $\mathcal{F}(k)$, $\mathcal{F}'(k)$ (mit Wellenfunktion $\mathcal{F}(k)$ (mit k))



Beziehung zu Dispersion der Wellenfunktion in den Dispersionen unterschiedlicher Wellen. Wellenfunktion in der k - x Ebene. Dispersion, analog zu 1D Dispersion in Dispersion der Dispersionen und Dispersionen durch den Wellenwert von k (ausgewertete Wellenfunktion) und Dispersionen Wellenfunktion in Gruppenwert.

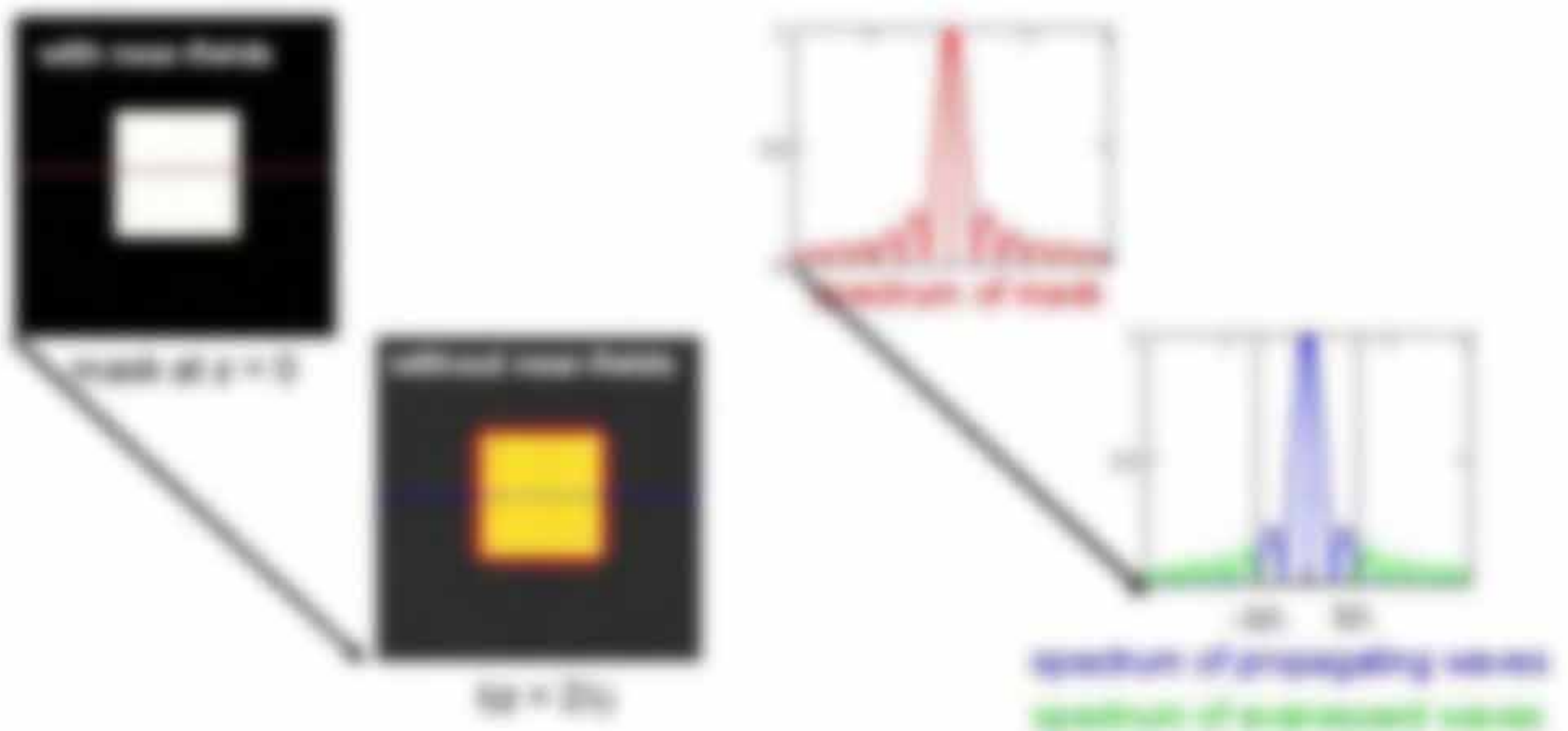


Abbildung 10: Umwandlung der Ausbreitung des Beugungsfelds über einer quadratischen Blende durch die Transformation von Frequenz in $k_x = 2\pi/\lambda \sin(\theta)$ in $k_x = 2\pi/\lambda \sin(\theta) = k_x \sin(\theta)$.

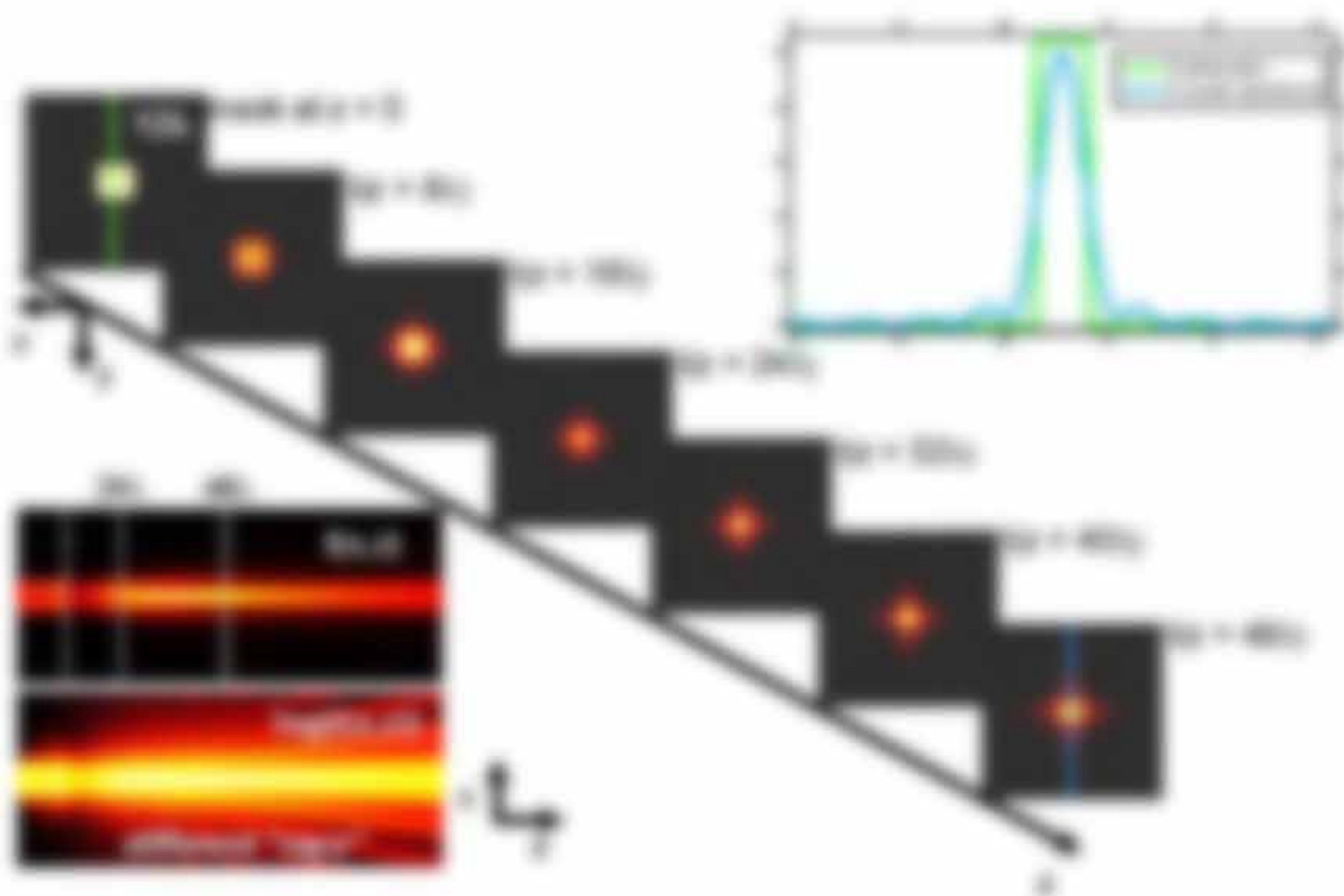
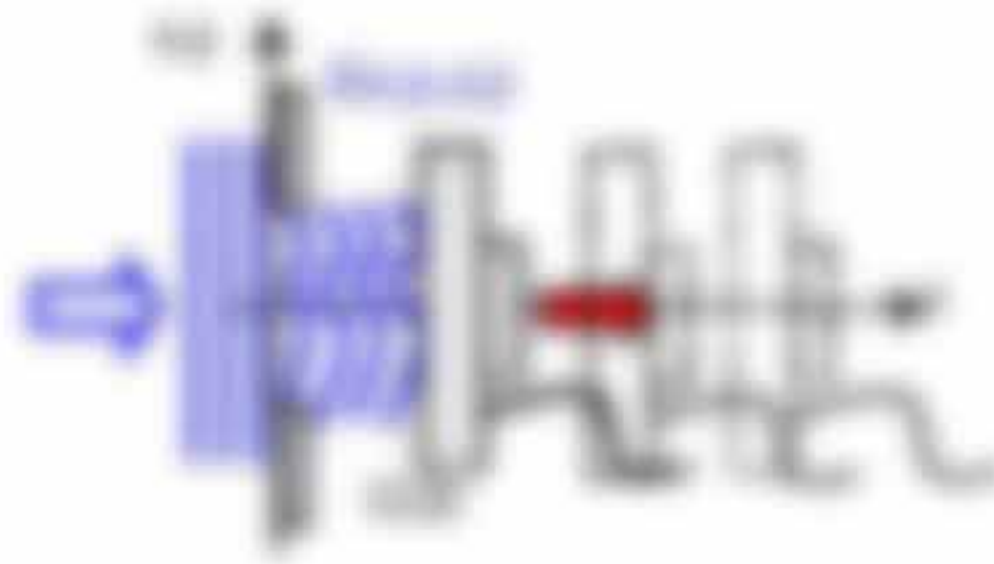


Abbildung 10: Umwandlung des Beugungsfelds über einer quadratischen Blende in $k_x = 2\pi/\lambda \sin(\theta)$ in $k_x = 2\pi/\lambda \sin(\theta) = k_x \sin(\theta)$ ist ein Abbildungsprozess der räumlichen Beugungsgänge auf den Frequenzraum $k_x = 2\pi/\lambda \sin(\theta)$.

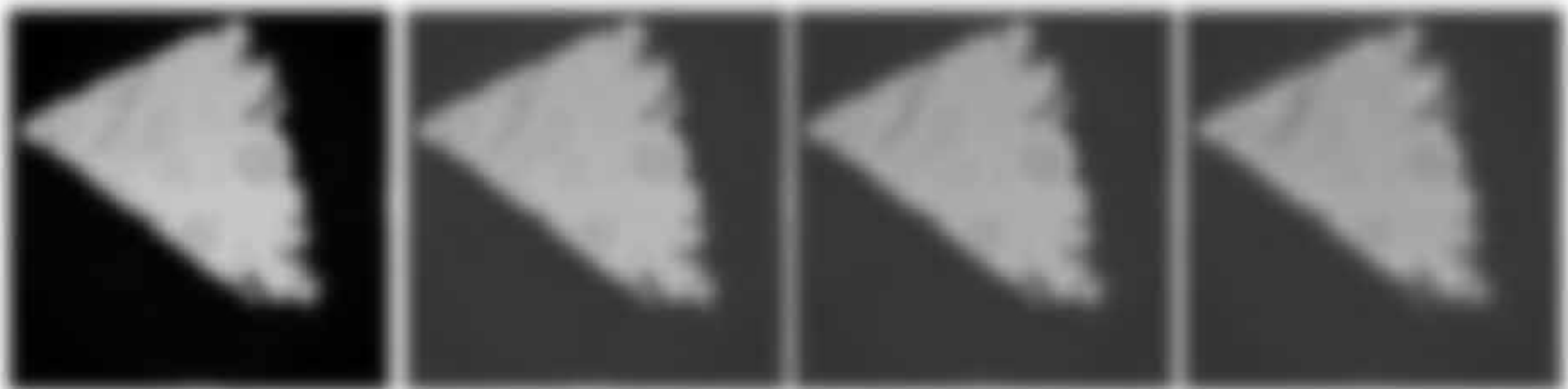
Experiment: Stellen Sie sich die folgenden Versuche bevor einer Wand durch Verschieben einer Gitterkante erfolgt:



Experiment



Experiment

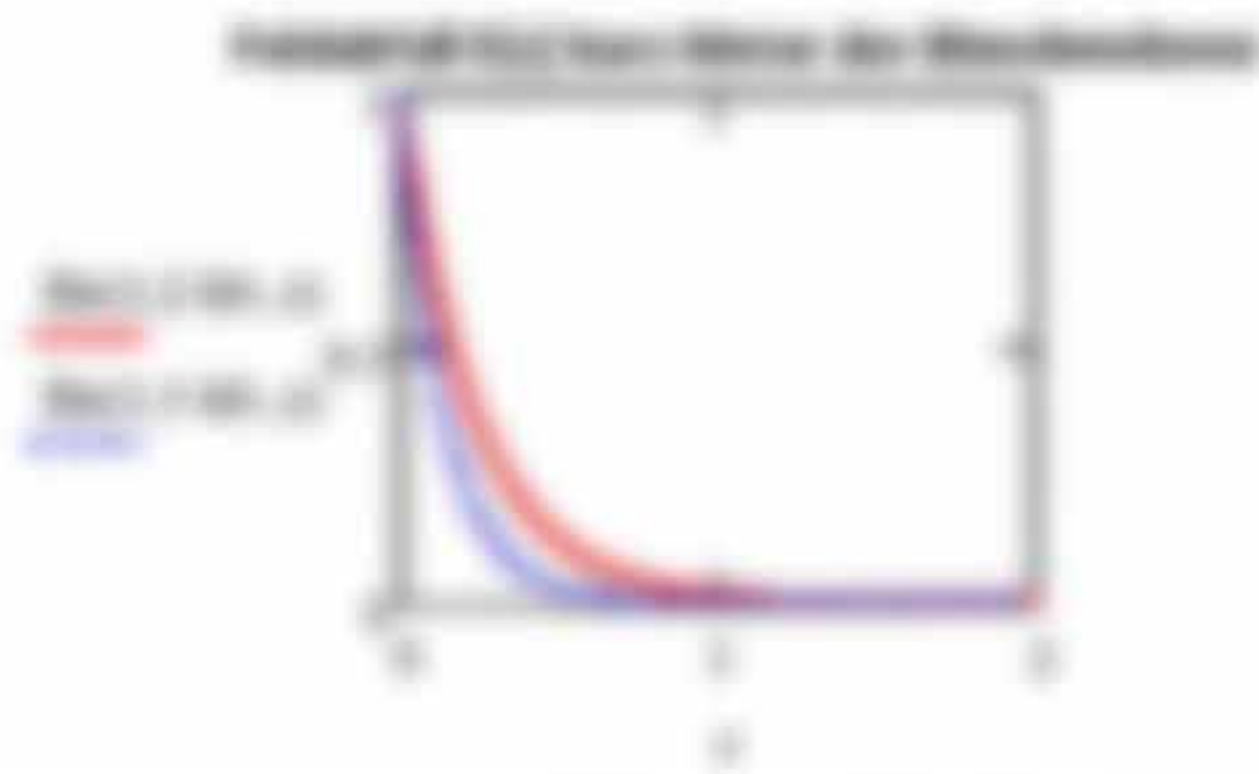


Beziehung zu Beugungsvorgängen bei Beugung an einem Gitter. Zwei weitere Beugungsvorgänge in Natur, werden mit einer Skizze verdeutlicht.

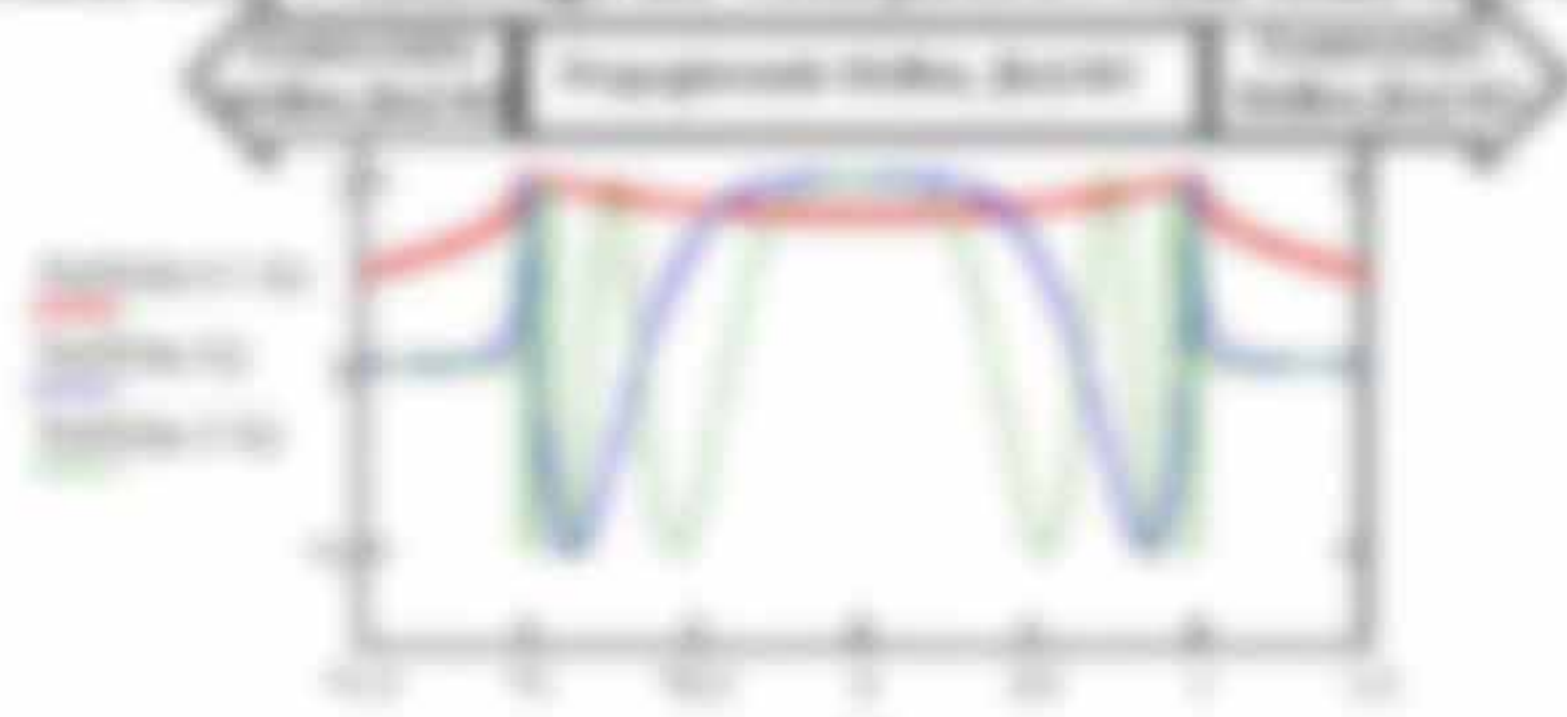
Skizze eines Beugungsvorganges durch ein Gitter bei unterschiedlicher Gitterweite d. Welche Maxima sind zu erwarten?

Skizze eines Beugungsvorganges in einem Gitter mit unterschiedlicher Gitterweite d. Welche Maxima sind zu erwarten? Welche sind zu erwarten? Welche sind zu erwarten? Welche sind zu erwarten?

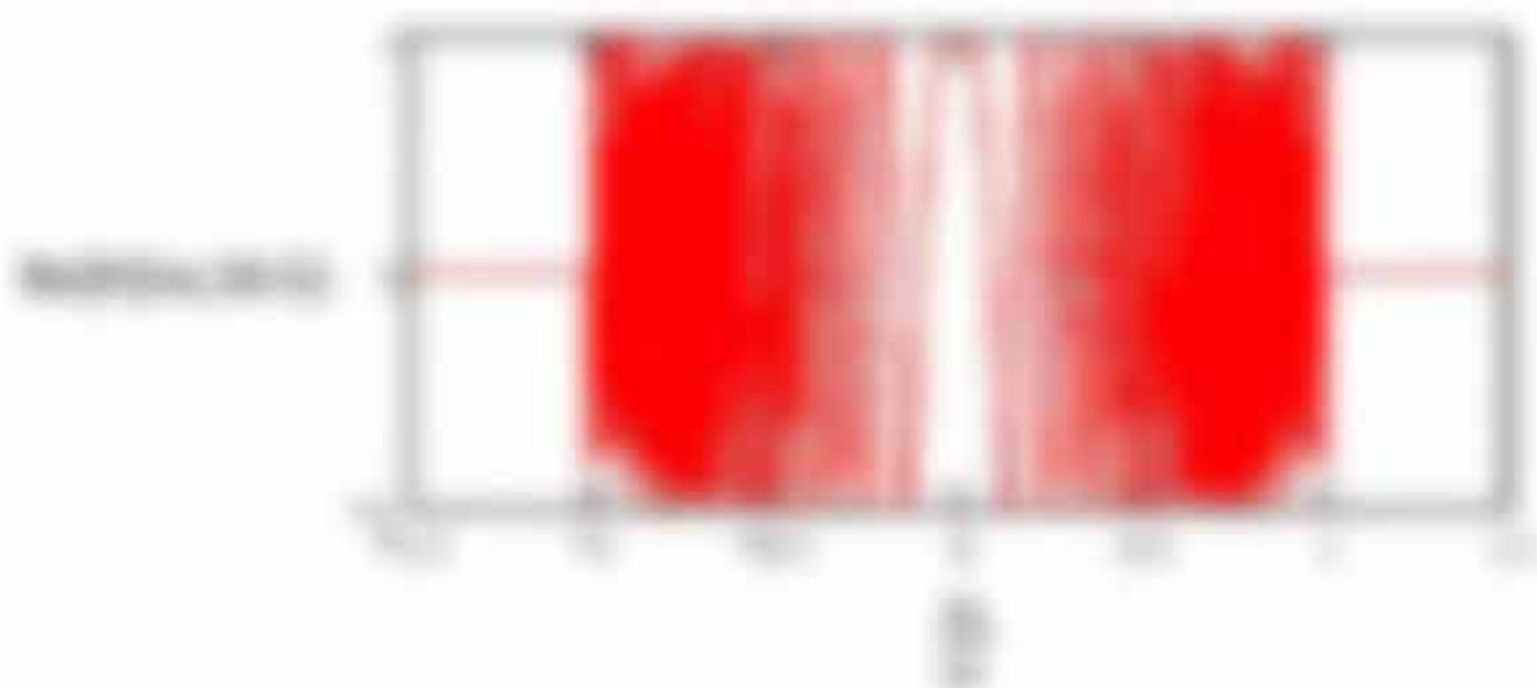
Transfer Funktion des freien Raums (geschrieben in Matlab/Python)



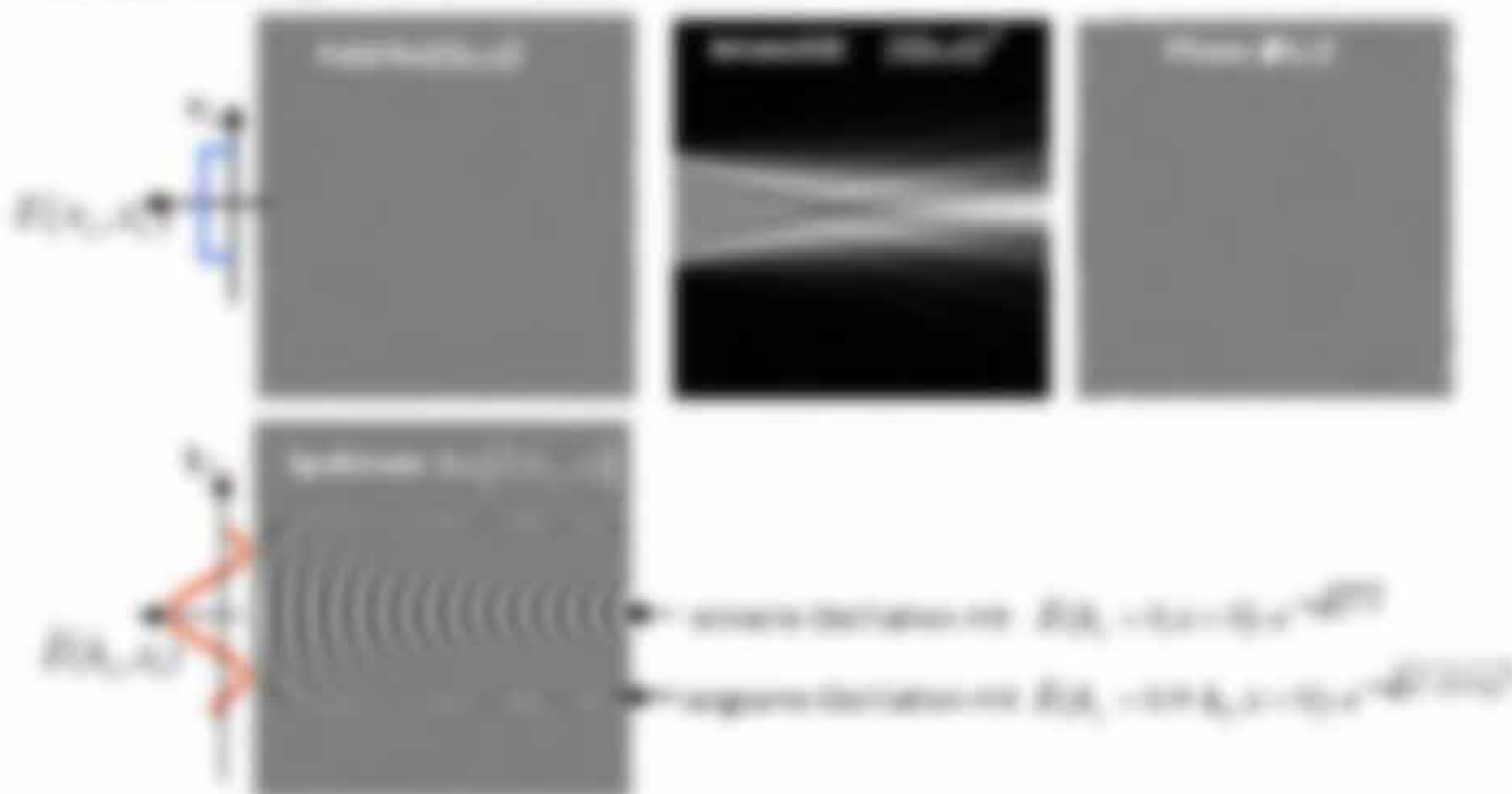
Amplitude bzw. Phasierung der Feldgrößen $E(x, z)$ mit einer Stelle der Grenzschicht



Amplitude bzw. Phasierung der Feldgrößen $E(x, z)$ mit einer Stelle der Grenzschicht



Verbreiterung einer ebenen Wellenfrente



Beugung ist Verbreiterung einer ebenen Wellenfrente an z. Wenn eine ebene Wellenfrente auf eine Spalte der Breite a trifft, so wird die Wellenfrente durch die Spalte als ebene Wellenfrente durchgelassen. Wenn die Wellenfrente durch die Spalte geht, so wird sie als Kugelwelle weiterverbreitet. Die Wellenfrente wird durch die Spalte als ebene Wellenfrente durchgelassen, wenn die Wellenlänge λ viel kleiner als die Spaltenbreite a ist.

Aufleitung einer Elementarwelle von der Kugelwelle zur Ebene

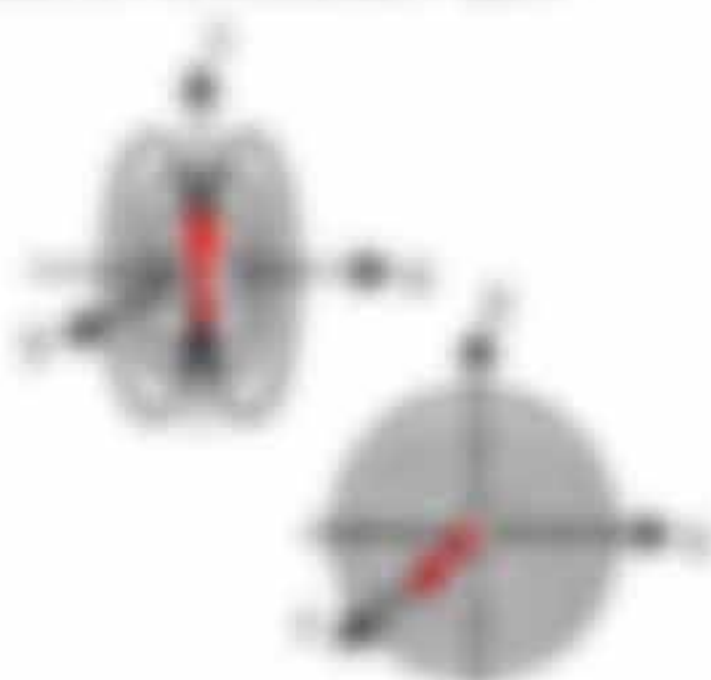
Da wir uns hier immer noch in der klassischen Theorie befinden, ist die Untersuchung zwischen dem Feld verbracht und parallel zur Ebene der Ebene eigentlich nicht angebracht, jedoch ist es – um spätere Verwirrung zu vermeiden – wichtig zu wissen, dass man bei der Ableitung einer Kugelwelle $k_x(z) = \text{parallel zur Ebene}$ in z-Richtung eine Ebene $k_x(z) = \text{parallel zur Ebene}$ erhält. Bei den folgenden Transformationen ist es genau umgekehrt mit der z-Achse.

Es ist $k_x = \sqrt{k^2 - k_z^2 - k_y^2}$ und $r = |k_x| = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Die Punkte-Auswertfunktionen als Elementarwellen für die z- und y-Orientierung lauten

$$A_1(x, z, t) = P_{k_x}^{-1}(e^{-i\omega t}) = \frac{e^{-i\omega t}}{2r} \quad (4.20)$$

$$A_2(x, z, t) = P_{k_x}^{-1}\left(\frac{1}{k} e^{-i\omega t}\right) = \frac{e^{-i\omega t}}{r} \quad (4.21)$$

(2) Elementarwellen der Ebene



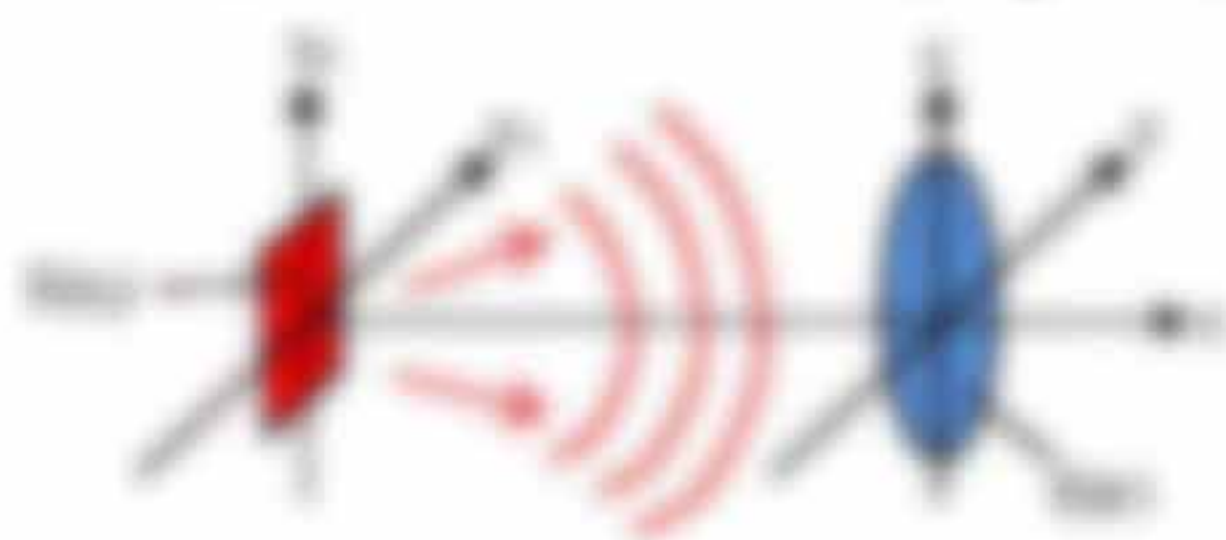
Bei $z \gg r$ und $r \gg \lambda$, also in dem Bereich wo $k_x \approx k$, erhält sich auch A_1 einer Kugelwelle an (und damit auch A_2), d.h. $A_1 \approx A_2$.

$$A_1(x, z, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{r} \left(-\frac{1}{2} \frac{z}{r} + \frac{e^{-i\omega t}}{r} \right) \approx \frac{e^{-i\omega t}}{r} \left(-\frac{1}{2} \frac{z}{r} \right) \approx A_2(x, z, t) \left(-\frac{1}{2} \right)$$

4.2.2 Die Beugungstheorie im Übergang

Der kugelförmige Prozess der Überlagerung von Elementarwellen entspricht mathematisch einer Faltung. Daher sind Beugungsmatrizen (z.B. Faltungsmatrizen) die Verteilung $f(x)$ in der Blendenöffnung und gelöst mit einer der physikalischen Näherung entsprechenden Antwortfunktion wie $h_{1,0}$, $h_{1,1}$, $h_{1,2}$ oder $h_{1,3}$ um die Fernfeld-Verteilung $f(x)$ zu erhalten. Verschiedene Näherungen können entweder auf einer Analyse über den Moment \mathcal{M} zum Moment \mathcal{M} oder über das Feld am Rand der Blende

bei $\mathcal{M} = (x, z, t)$ bzw. $\mathcal{M} = (x, z, t)$ der Ziel bzw. Moment, wobei $k_x = (k_x, k_y, k_z = 0)$ bzw. $k_x = (k_x, k_y, k_z = 0)$ der Wellenvektor heißt, wobei $k_x = \sqrt{k^2 - k_z^2}$



Das Folgerungsintegral lautet allgemein

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (A.20)$$

wobei $F = \int_{x_0}^x f(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ der Abstand zwischen Messpunkt und Quellpunkt ist. Das hier F bzw. die Ableitung $F'(x)$ kann aber ein Bogenmaß nicht gemessen ist sein, wie in der Messwert-Übersetzung festzulegen.

• Aufgabe 3 (maximal 10 P.)

Bogenmaß integral mathematisch unter wenn $F(x) = 0$ an Bogenmaß. Ansatz $F(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$

$$F(x) = F(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \\ = F(x, y) \left(\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \right) = F(x, y) \left(\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (A.21)$$

• Aufgabe 4 (maximal 10 P.)

Bogenmaß integral mathematisch unter wenn $F(x) = 0$ an Bogenmaß. Ansatz $F(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$

$$F(x) = \frac{1}{2} F(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{2} F(x, y) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (A.22)$$

• Ansatz $F(x, y) = \frac{1}{2} (F(x, y) + F(x, y))$

Mathematisches Mittel aus beiden Bogenmaß-Formeln - Ansatz und Ansatz Ansatz überführt in der anderen Formel im Hinblick auf die Berücksichtigung der Bogenmaß-Übersetzung. Der Ansatzwert liefert den Bogenmaßwert $F(x, y)$, welcher Bogenmaß-Übersetzung entspricht?

• Ansatz Lösung $F(x, y) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} + k^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (A.23)$

Es eine Entfernung von einem F betrachtet man nur noch einen Ansatzwert der Phase $F = 0$ für alle der optische Achse, wie $F(x, y) = \text{const} = 1$ gilt. Der Ansatzwert aus der optischen Phase ist periodisch zu setzen.



4.3. Wellen an Grenzflächen

Transversale Impulserhaltung: Reflexion und Brechung sind als Konsequenz der transversalen Impulserhaltung erklärbar. Der x -Vektor \vec{k} zur Wellenfunktion ändert beim Übergang ins andere Medium seine Richtung und seine Länge $k = 2\pi/\lambda$, jedoch ändert sich die Komponente k_x parallel zur Grenzfläche nicht. Das gleiche gilt für die y -Komponente $k_y = k \sin \alpha$ mit

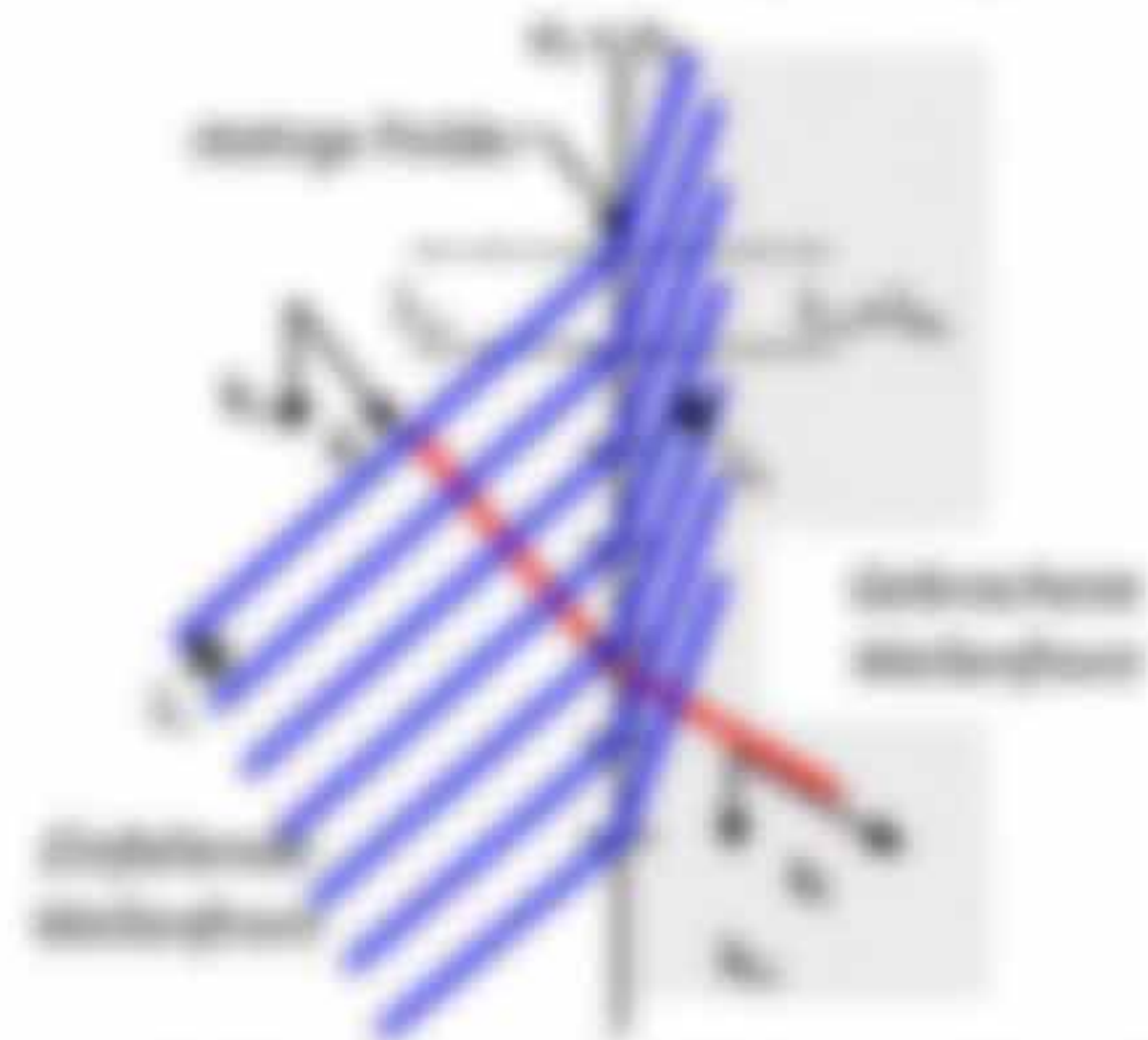
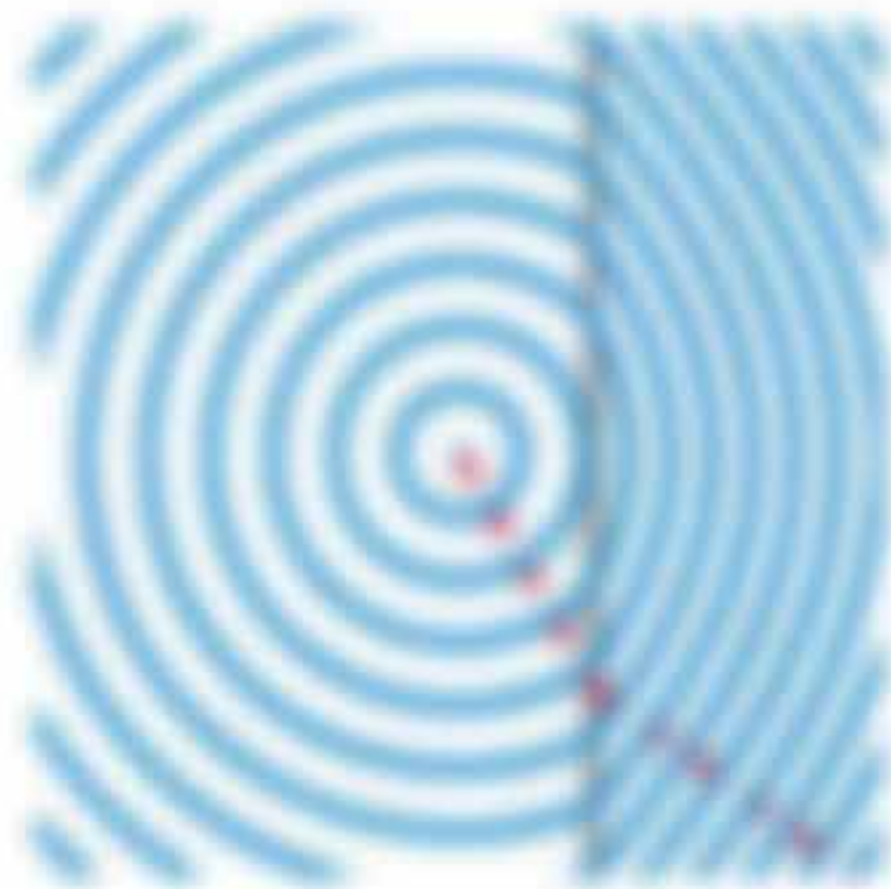


Abbildung 16: Aus der Richtung der Wellenfronten an der Grenzfläche ergibt sich mit der geometrischen Optik der Wellenvektor, der transversale Wellenvektor k_x ist konstant. In der Grenzfläche muss $k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$ gelten und daraus ergibt sich das Brechungsgesetz von Snellius.

Da die Phasengeschwindigkeit $v = \omega/k$ im dichteren Medium kleiner ist, treten die Wellen, die nach im dichteren Medium propagieren, ihre Nachbarn im dichteren Medium herum ab und gehen ein wenig, aber nicht an der Grenzfläche durch, sondern um die „Front parallel laufende Grenzwellen“ an der Grenzfläche.

Die Umkehrung der x -Komponente geschieht über eine **Evaneszenzwellen** im 3. Raum.

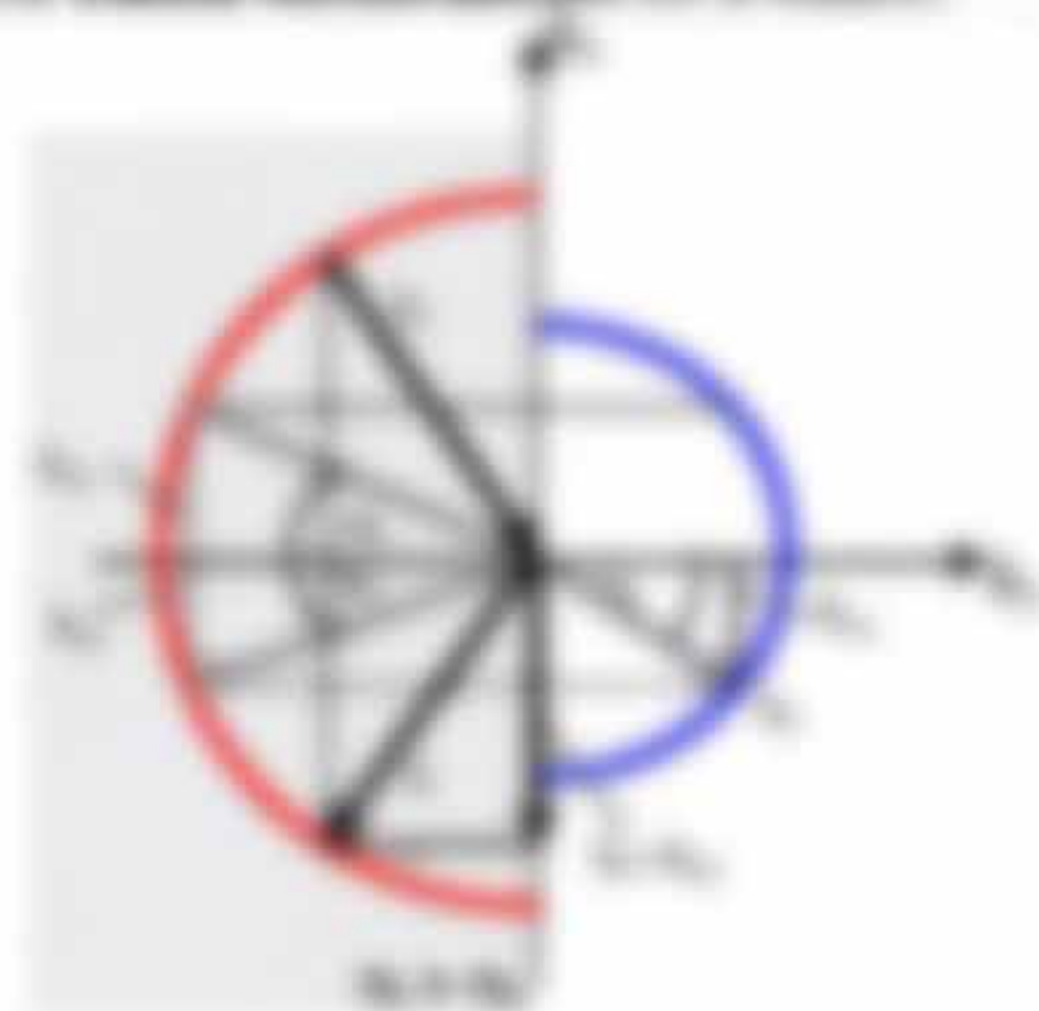
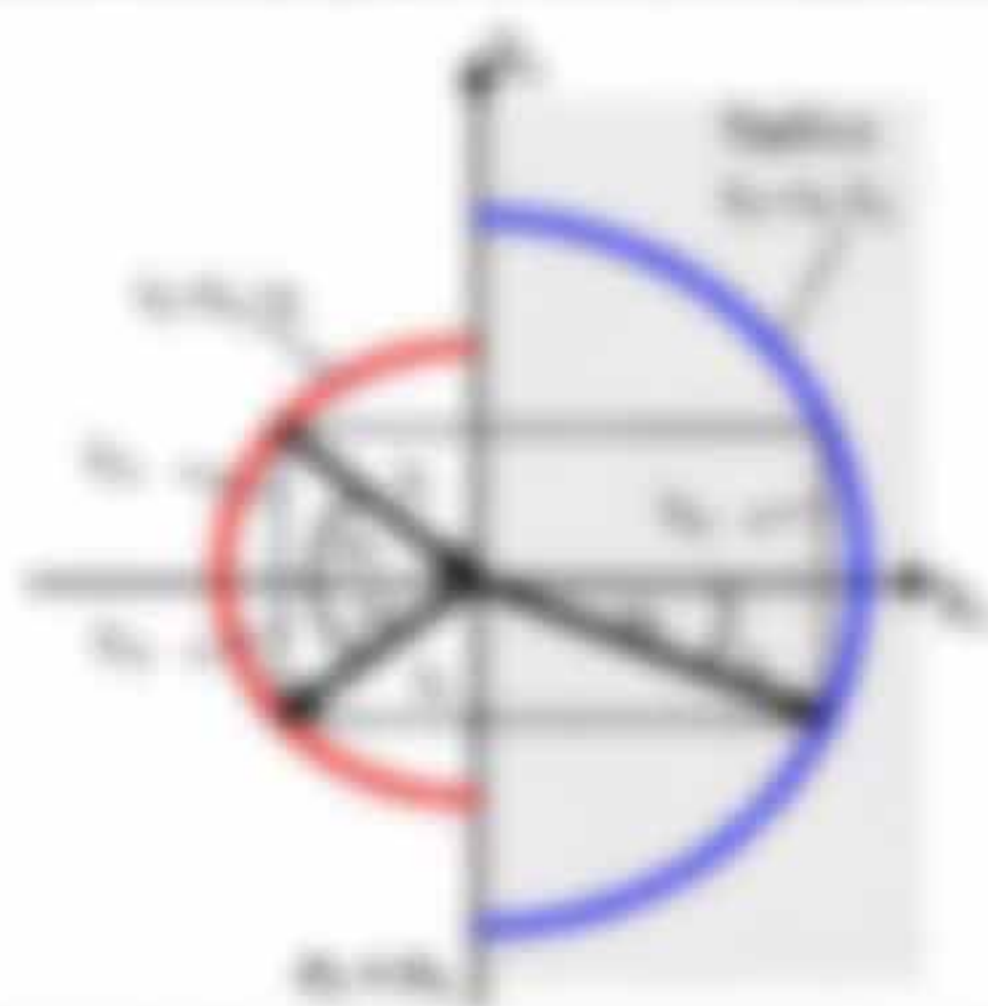


Abbildung 17: Brechung in optisch dichtere Medium (links, $v_1 > v_2$) und in optisch dünneres Medium (rechts, $v_1 < v_2$). Die Länge des Wellenvektors $k = 2\pi/\lambda$ ändert sich beim Durchqueren v_1 oder v_2 , und durch die Reflexion des Wellenvektors k_3 an der Grenzfläche und Brechung k_2 in Medium 2, wobei $k_{2x} = k_{1x}$ und $k_{2y} = k_{1y}$ gilt. Die Wellenlänge λ_1 und λ_2 ändern sich, wenn v_1 kleiner ist als v_2 und die Wellenlänge λ_3 und λ_4 ändern sich, wenn v_1 größer ist als v_2 .

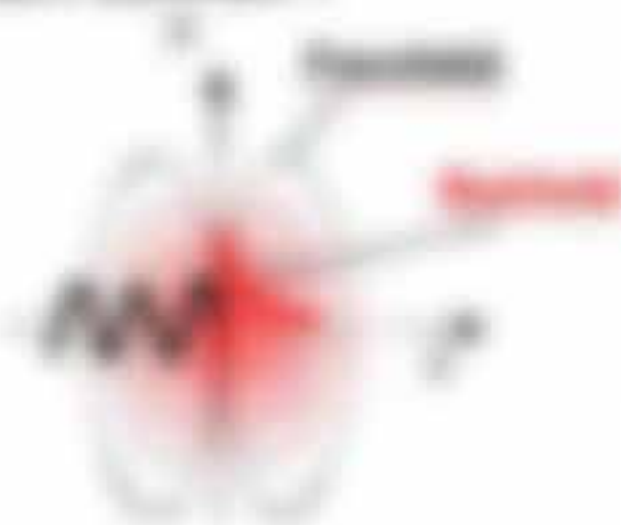
Somit ergibt sich ebenfalls das Snelliussche Brechungsgesetz bzw. das Reflexionsgesetz

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2 \quad (A.26)$$

4.4. Evanescente Wellen

Evanescente Wellen sind wie propagierende Wellen eine Lösung der Wellengleichung (siehe Eq. (A.20)) und damit überall zu finden, an Materie bzw. Übergangsstellen und die transportieren weder Energie noch Information und können nicht direkt gemessen werden. Tragt man aber einen Streifen (z.B. ein Draht) einem Objekt in das evanescente Feld ein, so emittiert dieser propagierende Wellen, welche in einer Rigg fallen können!

Jeder strahlende Objekt ist auch von einem evaneszenten Feld bzw. von einem Nahfeld umgeben, welches mit $1/r^2$ abfällt – im Gegensatz zum propagierenden Feld, welches fallend mit $1/r$ abfällt. Während propagierende Felder aus lokalen Phasen bestehen, bestehen Nahfelder aus virtuellen Phasen.



Evanescente Wellen sind aber bekannt durch die Reflexion bei Totalreflexion („Total internal reflection“). Tragt man die Hand sehr schräg unter $k_1 = k_2 \sin \alpha_1$ (kritischer Winkel) auf eine Grenzfläche zu einem niedrigerbrechenden Medium, z.B. von Glas auf Luft, so wird kein Input-Energie transportiert zur Grenzfläche in das

Medium mit $n_2 < n_1$ übertragen. Es entsteht eine virtuelle Oberflächenwelle, welche parallel zur Grenzfläche läuft.

Das Snelliussche Brechungsgesetz lautet entsprechend Eq. (A.26), dass sich der vertikale Input $k_x = k_1 \sin \alpha_1$ bei Auftreffen auf eine Grenzfläche erhalten bleibt. Man hat also

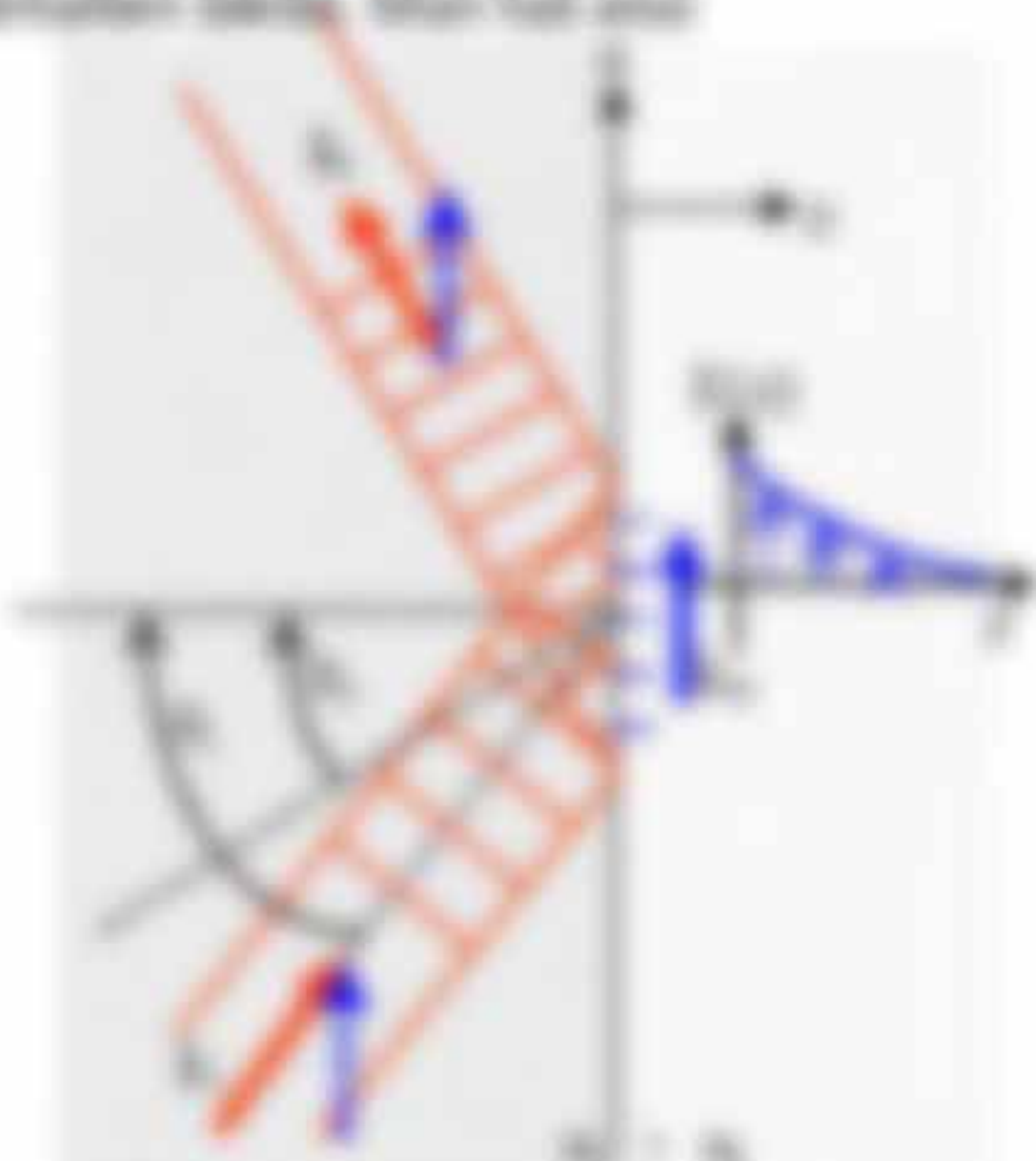
$$k_x = k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2 \quad (A.27)$$

Erreichte der Grenzwinkel k_x den kritischen Winkel k_c , so hat man eine Brechung unter $\alpha_2 = 90^\circ$, so dass $k_x = k_2 \sin \alpha_2 = k_2 \sin 90^\circ = k_2$ bzw.

$$k_{x,c} = k_2 \sin \alpha_2 = k_2 = k_1 \quad (A.28)$$

Für das evanescente Feld ergibt sich wie in niedrigerbrechender Richtung eine in z-Richtung laufende Welle mit $k_z = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}$

$$E(x,z) = E_0 e^{-k_x x} e^{i k_z z} e^{-i \omega t} \quad (A.29)$$



schreiben in 2. Richtung exponentiell getriggert ist. Diese hat die zweite x-Komponente als Mittelkomponente

$$k_2 = \sqrt{k_1^2 - (k_1 x)^2} = k_1 \sqrt{1 - (x/\lambda)^2} \quad (1.20)$$

begegnen sich der Drehmoment $k_1 = k_2$, es kommt die Drehmoment k_1 und der Drehmoment k_2 der momentanen Stelle zu λ

Die Intensität einer momentanen Stelle lautet

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2} \right) \quad (1.21)$$

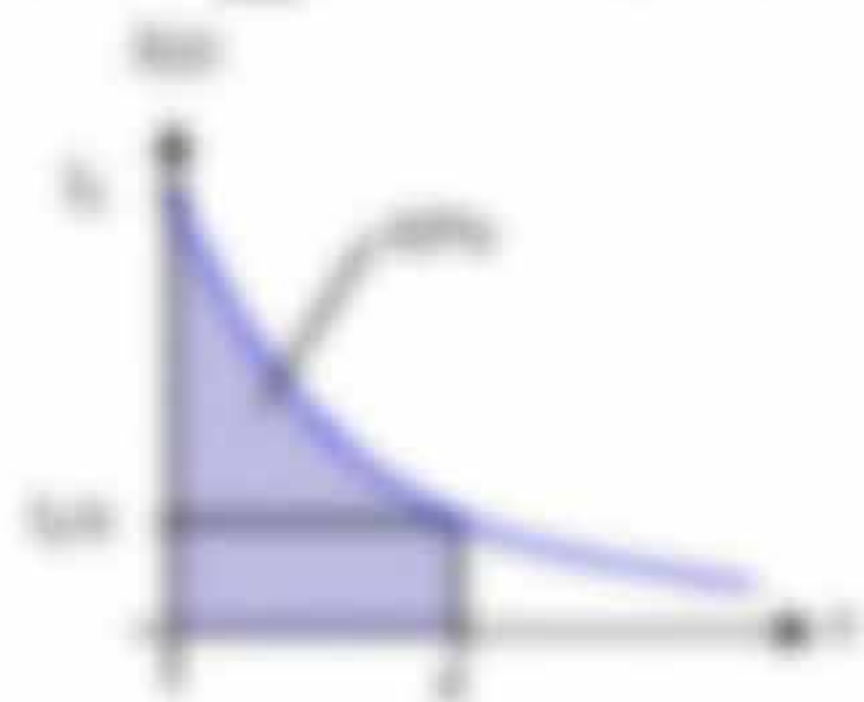
wobei man eine Drehmoment $\lambda = \lambda(x)$ definiert

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x/\lambda)^2}} \quad (1.22)$$

Wenn Abstand λ ist die Intensität auf den Wert I_0 , also gut ein Drehmoment abgelesen. Das heißt auch, daß $I_0 = I_0 = 100\%$ der gesamten Intensitätsverteilung I_0 der momentanen Stelle

$$I_0 = \frac{1}{\lambda^2}$$

im Bereich von λ erhalten und die Drehmoment λ ist ein Drehmoment von der Intensität und geht gegen unendlich, wenn λ sich dem kritischen Drehmoment $\lambda_c = \lambda_c(x)$ nähert. Das ist der Übergang von einer momentanen zu einer propagierenden Stelle.



Je höher der Drehmoment λ ist, desto höher wird die Drehmoment λ sein.

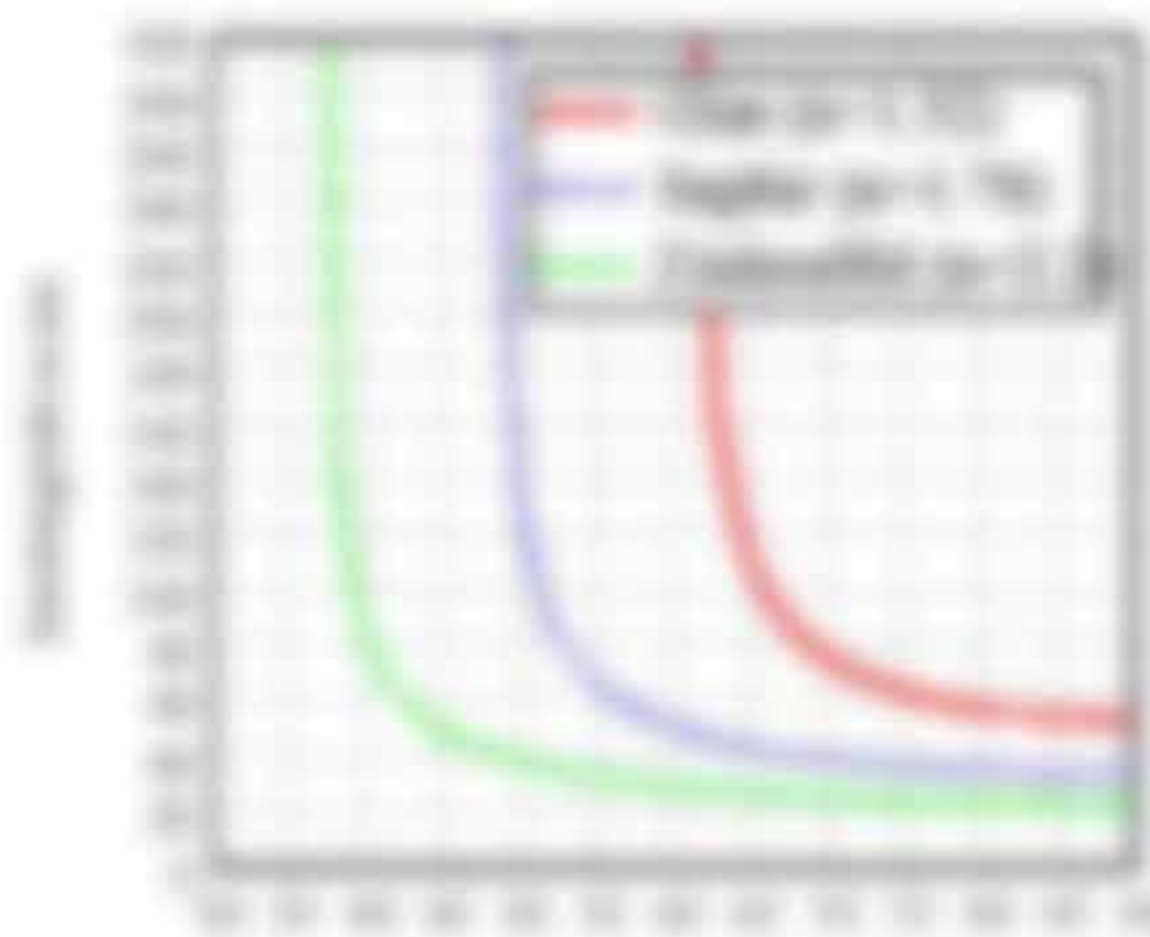


Abbildung 1.1

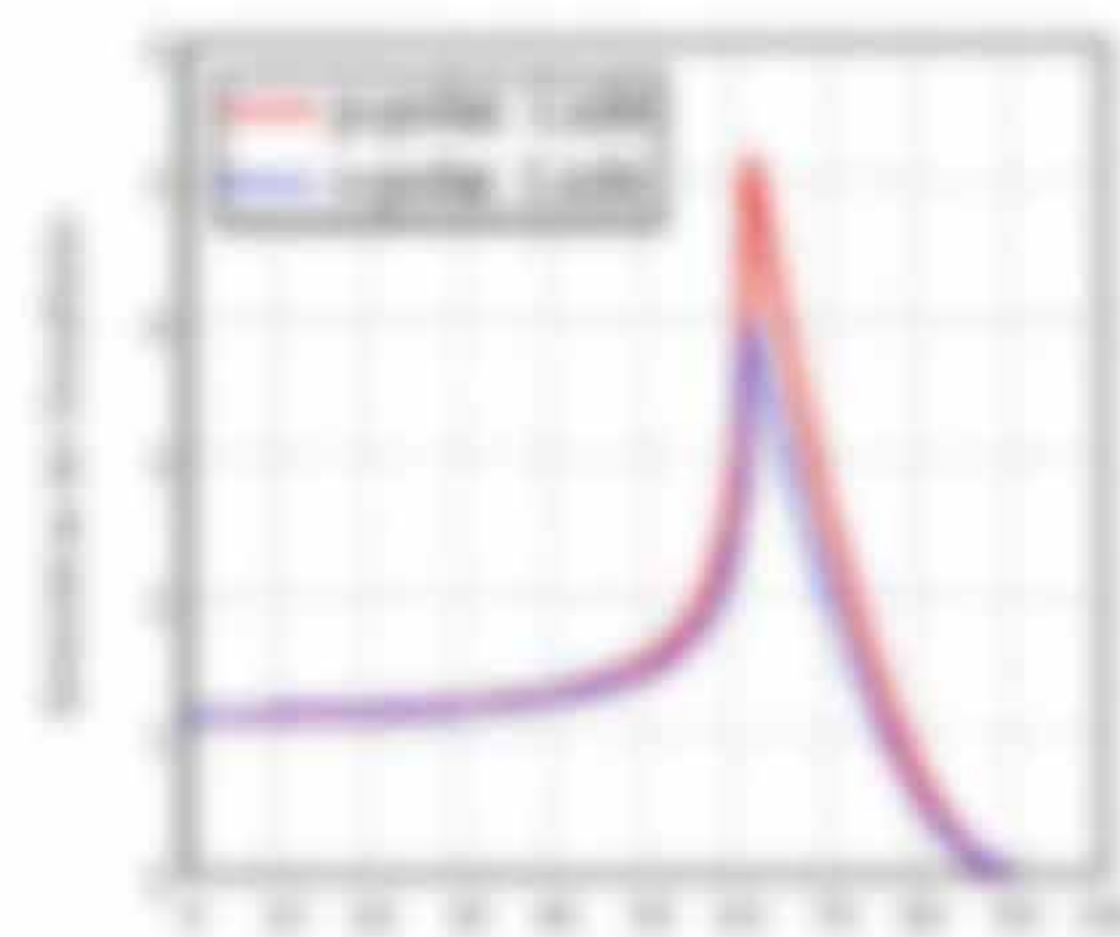


Abbildung 1.2

Abbildung 1.1 zeigt die Intensitätsverteilung auf der Drehmoment λ und die Drehmoment λ ist ein Drehmoment von der Intensität und geht gegen unendlich, wenn λ sich dem kritischen Drehmoment $\lambda_c = \lambda_c(x)$ nähert. Das ist der Übergang von einer momentanen zu einer propagierenden Stelle.

Neben der Ordnungszahl l beschreibt auch die Grenzflächennummer $k = 0, 1, 2, \dots$ die existierende Interstrukturen L_k für $\nu = 0$. Entsprechend der Grenzflächennummer mit $k_1 = k_2$ hängt die Intensität bei $\nu = 0$ nun auch von der Polarisation ab (siehe Herleitung)

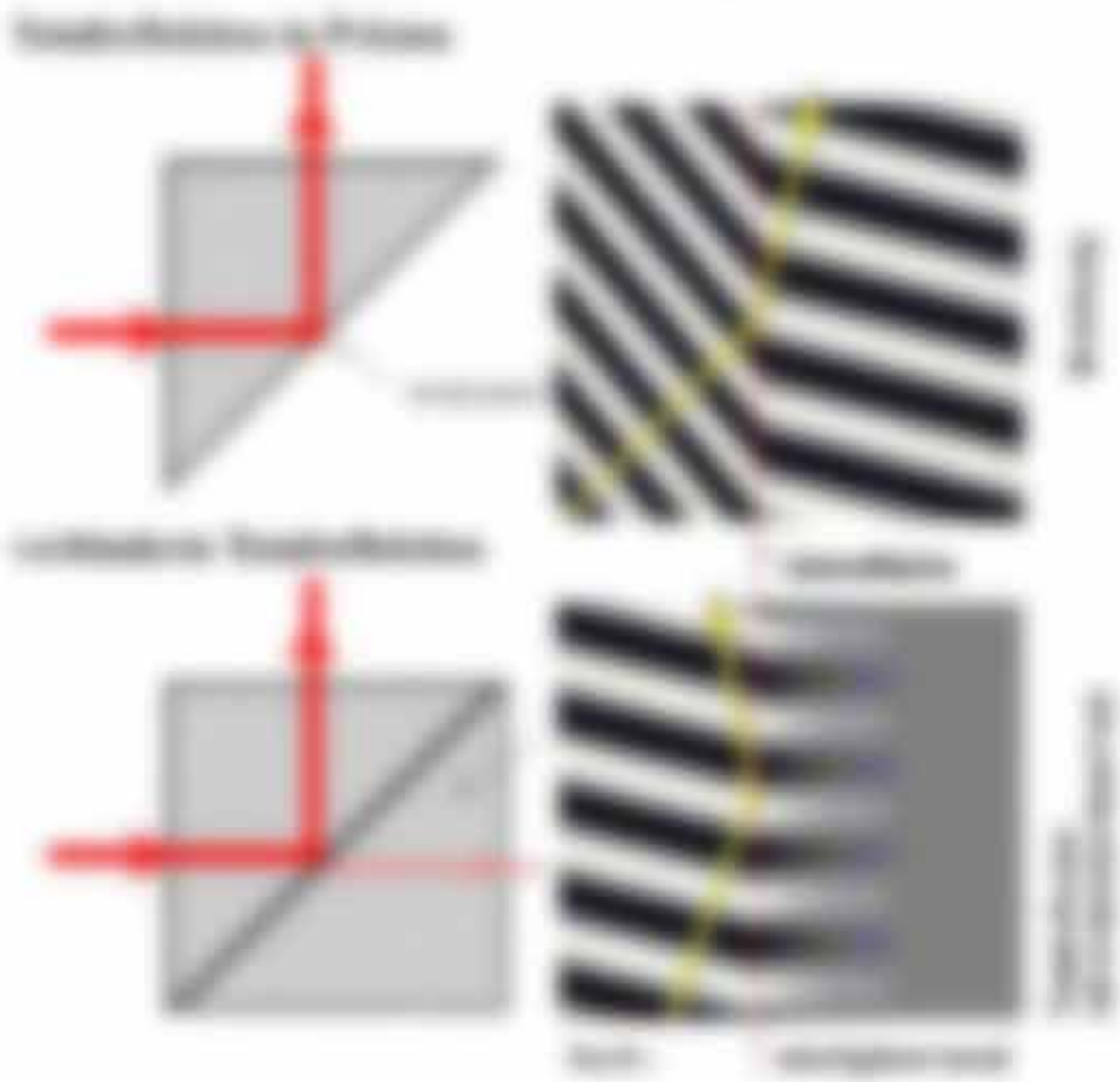
$$L_k(\nu) = \frac{2 \cos^2 \delta}{1 - \epsilon} \quad \text{bzw.} \quad L_k(\nu) = \frac{2 \cos^2 \delta \cdot (2 \cos^2 \delta - \epsilon)}{\epsilon_1 \cos^2 \delta + \epsilon \cos^2 \delta - \epsilon_2} \quad (4.36)$$

Man spricht auch von einer Interferenz- bzw. Reflexionsordnung, welche im Falle des Übergangs von Glas auf Wasser zu einer 4-5 fach höheren Intensität mittels der existierenden Interferenz L führt. Der Grund ist, dass auf der Glasseite die existierende L_1 und die reflektierte freie L_0 interferieren (siehe Übung, Formel für ν -Polarisation)

$$L(\nu) = L_0(\nu) + L_1(\nu)^2 \quad (4.37)$$



Das ν Zeichen resultiert daher, dass die reflektierte Welle je nach ν phasenverschoben ist und somit die Interferenz nicht maximal konstruktiv ist. Wenn man die existierende Welle im reflektierenden Medium, so wird die existierende Welle wieder phasenversetzt und spricht von „geringer“, bzw. „geringerer“ bzw. „geringersten“ Transparenz. Dieser Fall entspricht dem Vorliegen einer Streifen in der existierende Fall.



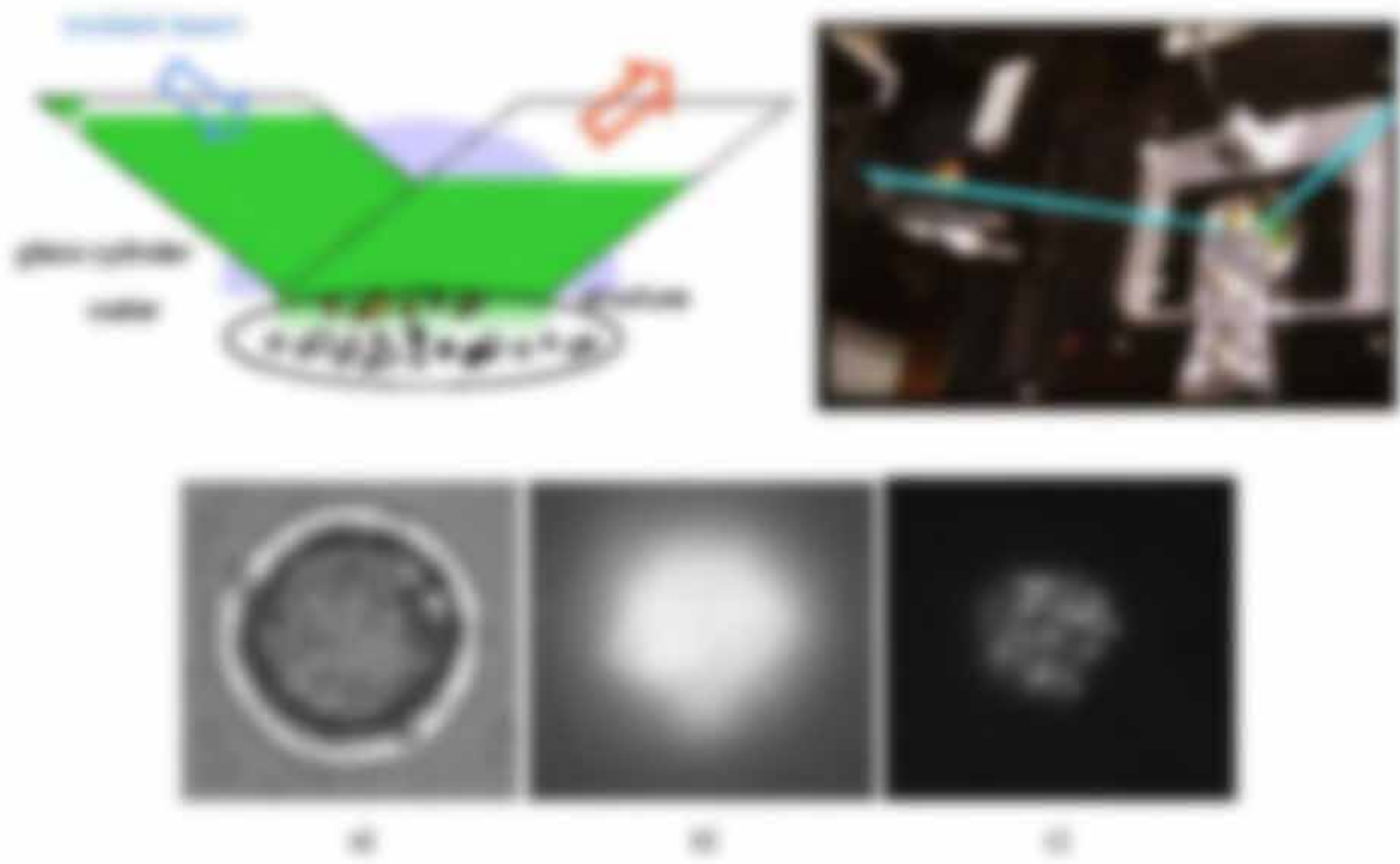
Beim Licht wird die Reflexion im reflektierten Medium nicht phasenversetzt, sondern phasenversetzt. Dies führt zu einer Verstärkung der Reflexion.

Anforderungen für geringe Transparenz bei einer Luftschicht sind:

- Abstrahlwinkel: Die transmittierte Intensität L gilt nur für $\nu = 0$
- vertikale Transparenz L ist über ν erreichbar (siehe Übungsaufgabe)



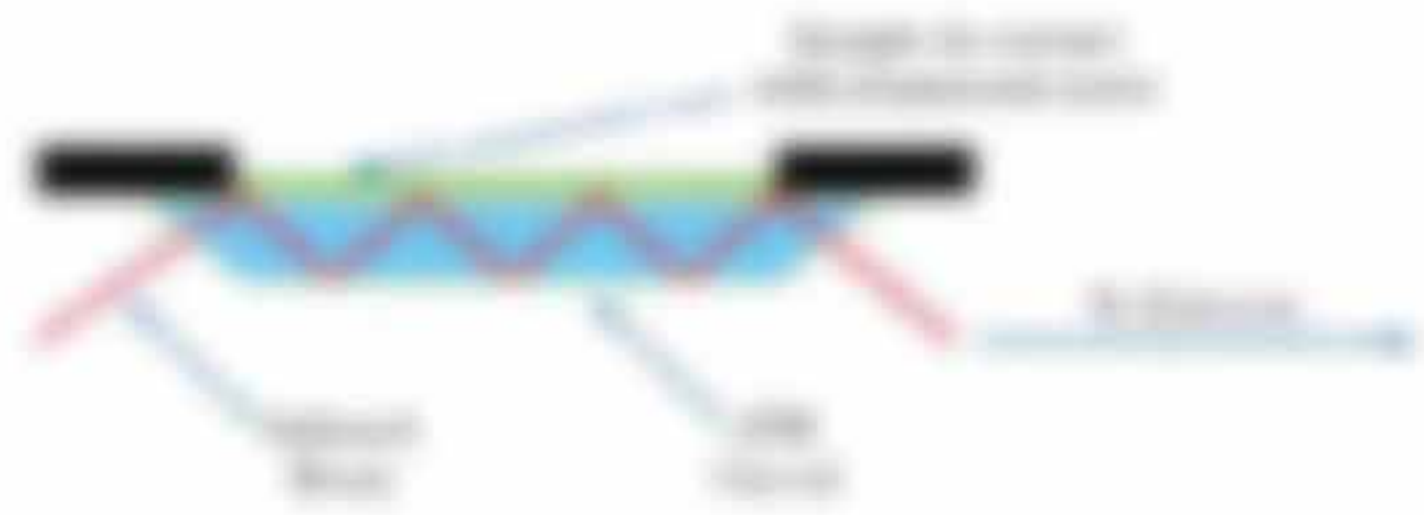
Anwendung in der Mikroskopie: Beschichtung sehr dünner oberflächenaktiver Schichten, so dass der unstrahlte Hintergrund nicht strahlt und der Kontrast steigt.



Erreicht man Erzeugung neuerer Arten der Laser (z.B. Diodenlaser) in einem und in einem für die Erzeugung (Erzeugung) einer unregelmäßigen Figuren (z.B. in der Erzeugung einer Art, in der Erzeugung der Art) sowie mit verschiedenen Methoden (z.B. in der Erzeugung der Art) in einem Laser (z.B. in der Erzeugung der Art).

ATR-Spektroskopie

In der ATR-Spektroskopie („Attenuated Total Reflectance“) werden typischerweise mit infrarot (IR)-licht feste und flüssige Proben in das evaneszente Feld gebracht und die wellenlängenabhängige Absorption gemessen. Die Intensität des reflektierten Strahls ist dabei umso geringer, je höher die Absorption der Substanz im evaneszenten Feld.



Erreicht man durch die Erzeugung neuerer Arten der Laser (z.B. Diodenlaser) in einem und in einem für die Erzeugung (Erzeugung) einer unregelmäßigen Figuren (z.B. in der Erzeugung einer Art, in der Erzeugung der Art) sowie mit verschiedenen Methoden (z.B. in der Erzeugung der Art) in einem Laser (z.B. in der Erzeugung der Art).

Eine besonders empfindliche Methode zur Bestimmung in einer Schicht in einem unebenen Feld zu messen, ist die

Oberflächenplasmonenresonanz (Surface Plasmon Resonance, SPR)

Man versetzt eine dielektrische Grenzfläche (mit n_1) mit einer dünnen Metallschicht (mit n_2), in der die nach unten verfallende Lichtwelle des Totalreflexions (Plasmonen) in Schwingungen versetzt, und zwar mit

$$\text{die Plasma-Resonanz-Frequenz } \omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \epsilon_2}} \quad \text{(siehe Kap. 2.2.2) und}$$

$$\text{die Dickenbedingung } n_1 d(\omega) = n_2 d(\omega) = \lambda \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right) \quad \text{(siehe Kap. 2.2.2)}$$

Es entsteht ein totaler Totalreflexion, wobei nur die Energie in Metall absorbiert wird. Das einfallende elektromagnetische Licht besteht aus Querschnitt, der Plasma-Frequenzen, und fällt wieder mit n_1 exponentiell ab. (siehe Kap. 2.2.2)

Die Methode

Das einfallende Lichtwellen mit λ wird im Resonanzfall bei $\omega = \omega_p$ stark absorbiert, es verliert Energie und Impact an das Metall, und der reflektierte Strahl hat minimale Intensität I_r . Die Resonanzbedingung ist sehr empfindlich, wenn sich $n_2 = n_2^2$ nur geringfügig, so wird I_r schnell wieder größer!

Anwendung

- Schichtdickenmessung
- Anlagerung von Molekülen (Proteinen) an Metallschicht, wenn deren n_2 und Absorptionsgrad in Funktion der Zeit

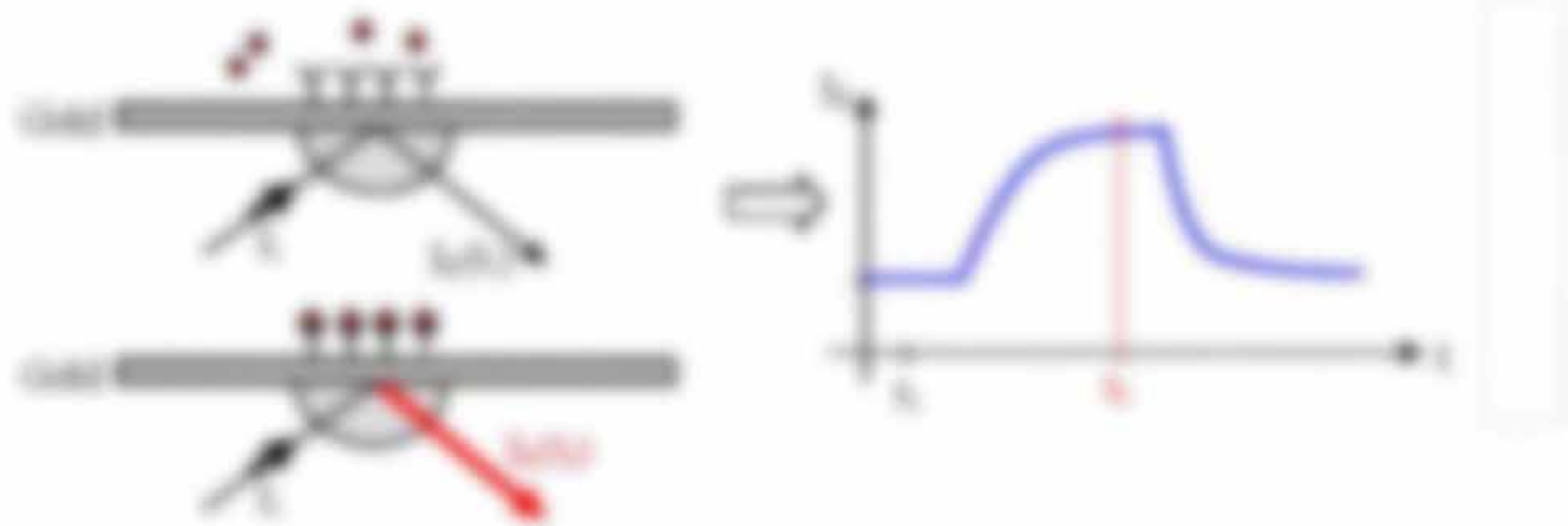


Abbildung 20: Nach Anlagerung der Moleküle (rote Kugeln) an die Metallschicht an der Grenzfläche ändert sich die Dicken n_2 in der die Lichtwelle und die Resonanz verschieben sich, so das wieder mehr Licht I_r reflektiert wird. Hierbei ändert sich n_2 mit der Anzahl der an- und abströmenden Moleküle.

4.5. Beugung an dünnen Amplituden- und Phasengittern

Wir haben an Beugung und Lichtausbreitung hinter einer Öffnung in freier Raum betrachtet, wobei bestimmte Amplituden herausgefiltert oder gelassen wurden.

Nun wollen wir eine komplexe Amplitude $T(x)$ im Ortsraum aufmultiplizieren um auch Phasengitterungen zu berücksichtigen, dieses Modemodell bzw. einmahlige Beugung ist wichtig zu berücksichtigen.

4.5.1. Ansatz von Kirchhoff

Es wird eine der Modema bzw. die Lösung beschreibende Funktion $T(x)$ auf die bekannte Feldverteilung $E(x, z=0)$ aufmultipliziert, um das Feld $E(x, z)$ bzw. hinter dem Modema bzw. dem Objekt zu erhalten:

$$E(x, z) = E(x, z=0) T(x) \quad (4.50)$$

mit T komplex und $T(x) = 1$: $E(x, z) = E(x, z=0) e^{ikz}$ (4.51)

Wir unterscheiden

$T(x) = A(x)$: Amplitudenmodulationsgitter
(z.B. Loch, Spalt, Reflektor)

$T(x) = e^{i\phi(x)}$: Phasenmodulationsgitter (z.B. Gitter, Prisma, holographische Gitter)

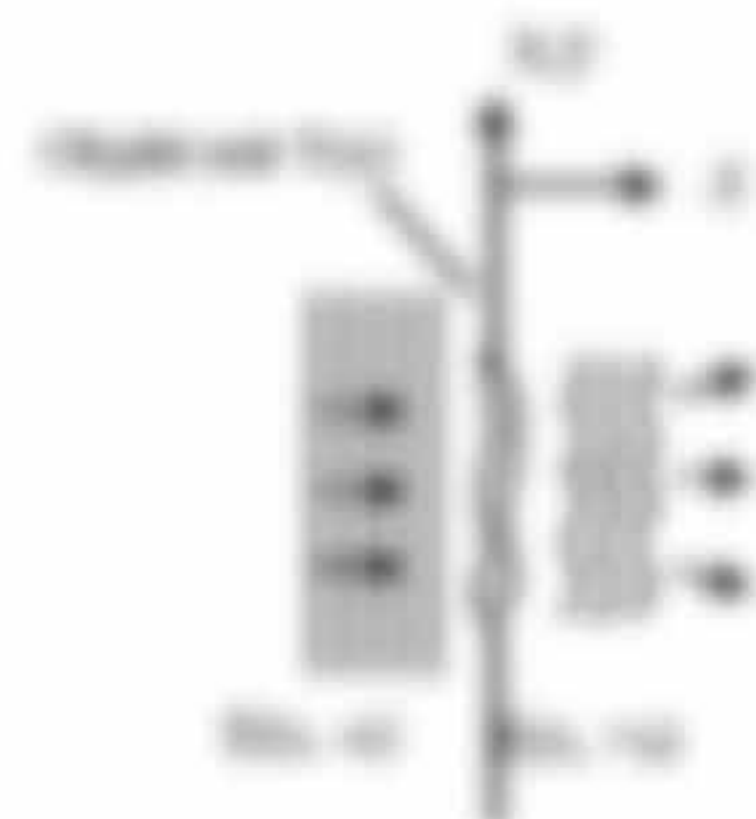


Abbildung 4.5.1: Modemodell für einmahlige Beugung an dünnen Gittern

Bei einer Anode ist wichtig für diese Formulare sind

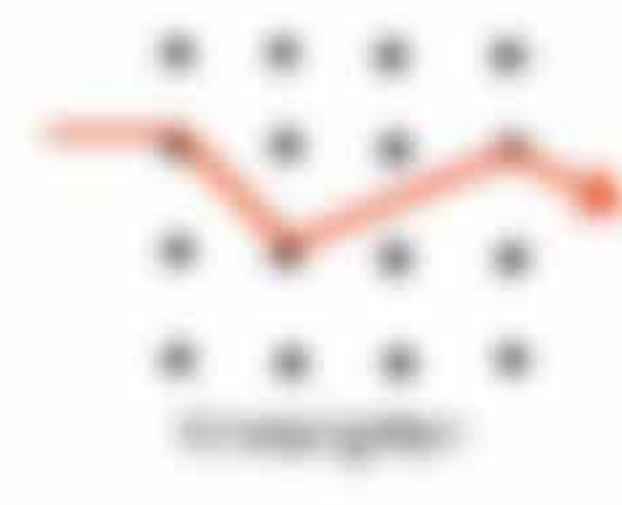
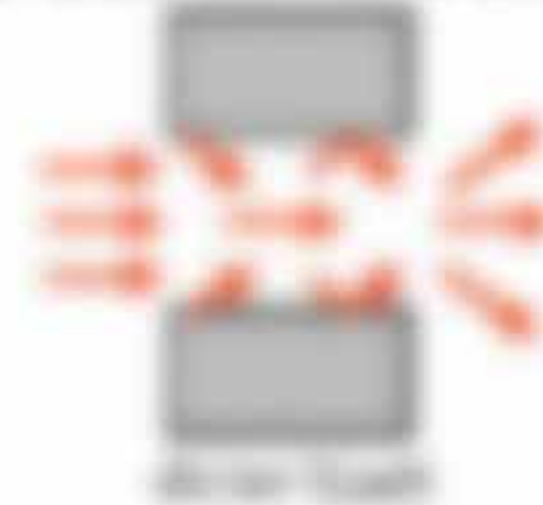
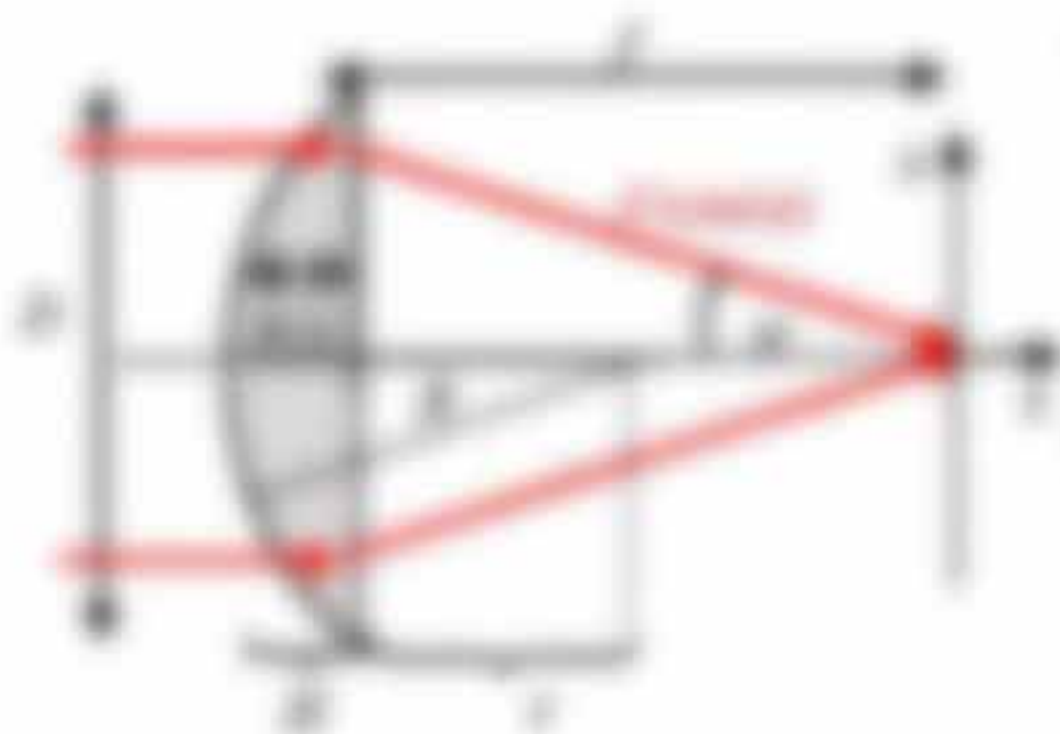


Abbildung 4.5.2: Modemodell für einmahlige Beugung an dünnen Gittern

die Modemodulation erfüllt und somit nicht nur eine Richtungsänderung der k -Vektoren, sondern zusätzlich ein Umdrehen der k -Vektoren erlaubt.

Die Phase ist allgemein über eine Wellenfunktion definiert: $\phi(x) = k \cdot x$ (4.52) (4.53)

Wichtige Anwendung: Transmission durch kleine planare Linse mit Brechzahl n_2



- Profil bzw. Höhenfunktion der Linse

$$h(x) = \sqrt{f^2 - x^2} \cdot n_2$$
 mit Krümmungsradius R
 wobei $f = R + d + (n_2 - n_1) f$
- Durchdringung Phasenschiebung

$$h(x) = n_2 \sqrt{f^2 - x^2} \quad d = \text{Dicke}$$

$$z = \text{Höhe}$$

Die Linse speichert somit die folgende Phaseninformation



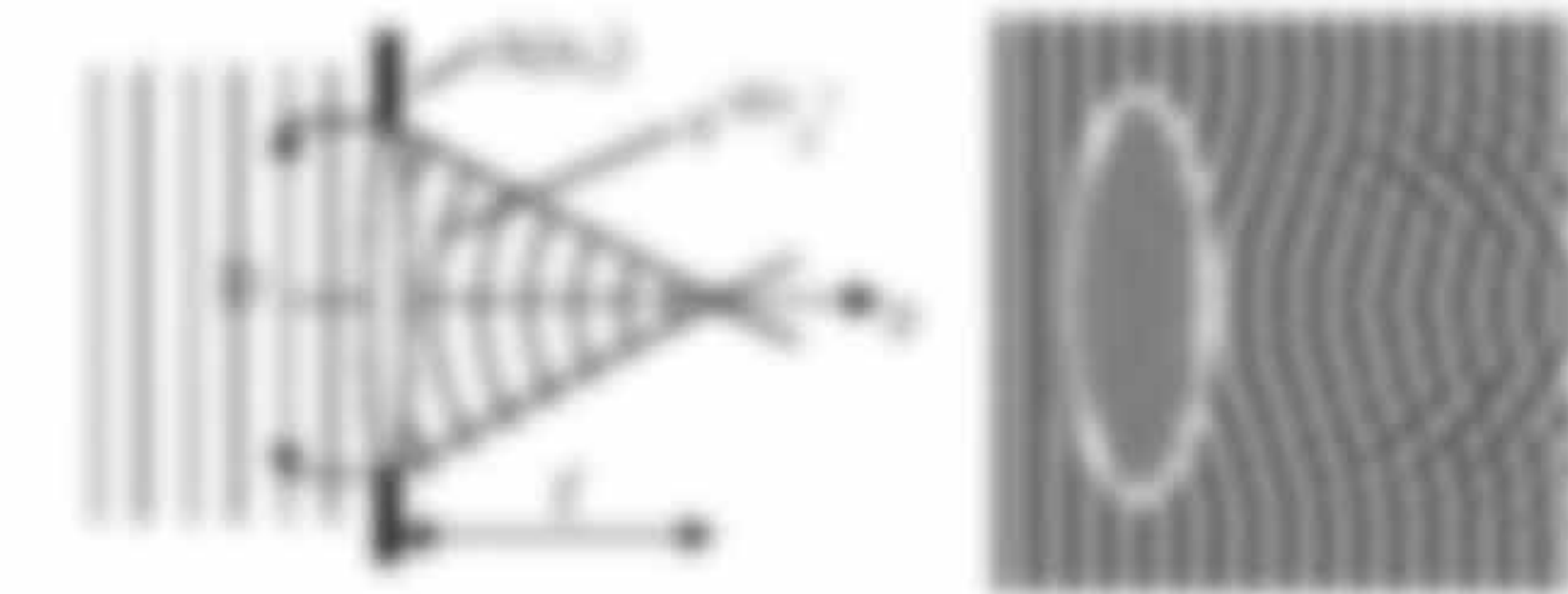
$$h(x) = \sqrt{f^2 - x^2} \cdot n_2 \quad d = \text{Dicke} \quad z = \text{Höhe} \quad (140)$$

Man erhält die Phase von $h(x) = \sqrt{f^2 - x^2} \cdot n_2$ und $h(z) = 0$.
 Somit ist $\tilde{U}(x) = e^{i\pi n_2 \sqrt{f^2 - x^2}}$, wobei die konstante Phase $e^{i\pi n_1 z}$ weggelassen ist. Man kennt die Amplituden bzw. Höhenfunktion $h(x)$, welche bei Feldtransformation lautet: $h(x) = \sqrt{f^2 - x^2}$.

Wie erhält man das Feld $\tilde{U}(x, z)$ im Abstand z hinter der Linse und der Linse-Mitte z ?

Man wähle das Winkelgitter \tilde{U} und propagiere das Feld über $e^{i\pi \sqrt{f^2 - x^2}}$ bis $z = z$

$$\tilde{U}(x, z = z) = \tilde{U}_0 \left[e^{i\pi \sqrt{f^2 - x^2}} \cdot e^{i\pi \sqrt{z^2 - x^2}} \right] e^{i\pi \sqrt{f^2 - x^2}} \quad (141)$$

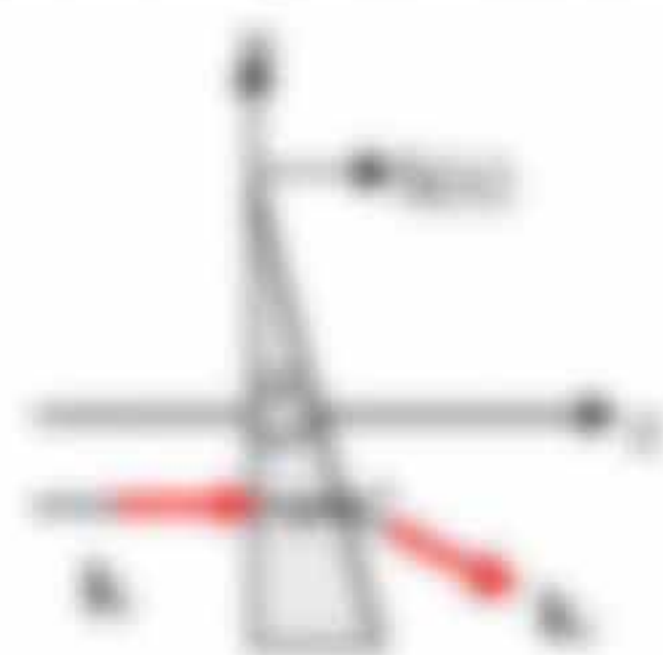


Beziehung 141: Phasenschiebung bei Überbreitung. Die Linse und die Wellenfronten sind nicht unendlich dünn und die Wellenfronten sind nicht unendlich groß. Man muss die Wellenfronten in die

Das Feld $\tilde{U}(x, z = z)$ ist im Fokus nicht sehr begrenzt und verhält sich durch die Beugung an der Linse-Mitte einer Bsp-Funktion an einem Gitter (2.21) \tilde{U} – allerdings geht nicht um die Funktion, sondern in der Brennebene bei $z = f$

$$\tilde{U}(x, z = f) = \tilde{U}_0 \left[\tilde{U}(x, z = f) \right] \cdot e^{-i\pi \frac{(f-x)^2}{2f}} \quad (142)$$

Andere Beugung: Gitter-Phasen als Übung



- Wiederholung: $E(x) = \sum_n \delta(x - nd)$
- Fourierentwicklung: $E(x) = \sum_n e^{i2\pi nx/d}$
- Wahl von $k_x = 2\pi/d$
- Interferenzformel: $E(x, z) = \int E(x') e^{ik_z(z-z')} e^{ik_x(x-x')} dx'$

Die Regel Phasenänderung im Diffrakt, Propagation im Frequenzraum

$$\begin{aligned}
 E(x, z + \Delta z) &= E(x) \int E(k_x) e^{i(k_x x - k_z(z+\Delta z))} dk_x \\
 &= E(x) \int E(k_x) e^{i(k_x x - k_z z)} e^{-i k_z \Delta z} dk_x \\
 &= E(x) e^{-i k_z \Delta z} \int E(k_x) e^{i(k_x x - k_z z)} dk_x
 \end{aligned}$$

Zurück in den Ortsraum mit $k_z = k \sqrt{1 - (k_x/k)^2}$

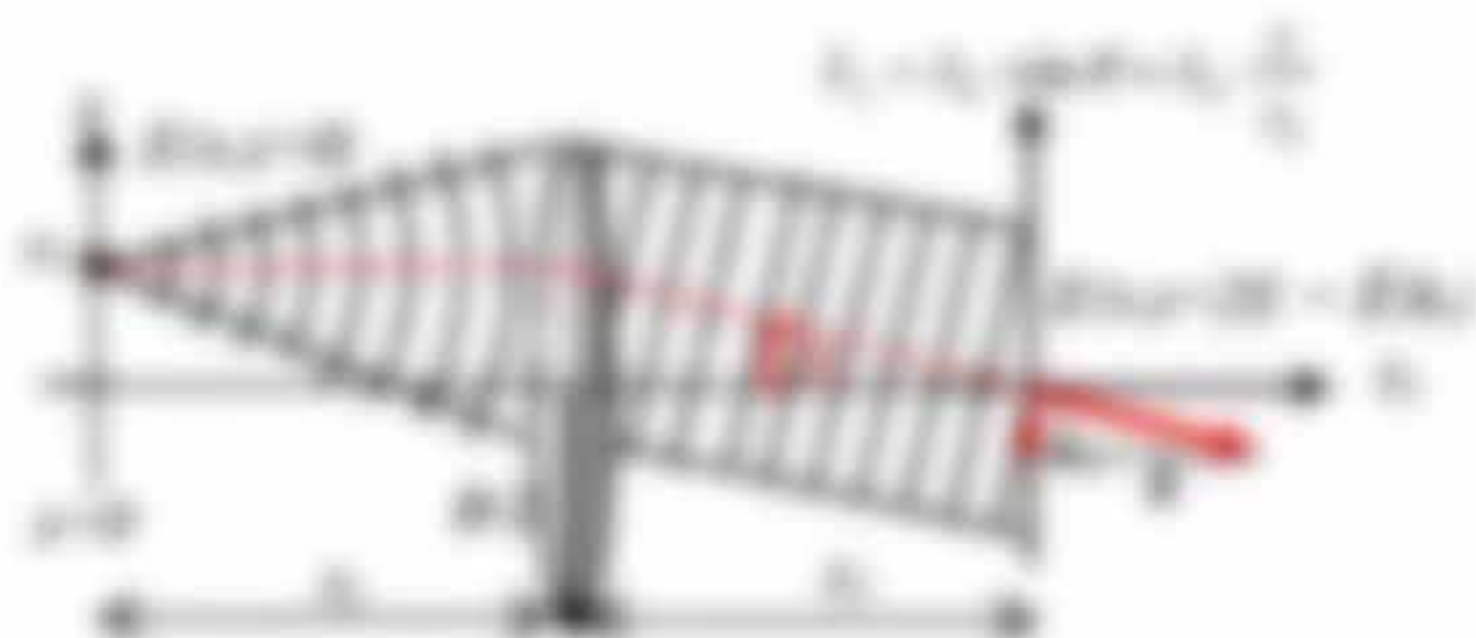
$$\begin{aligned}
 E(x, z + \Delta z) &= E(x) \int E(k_x) e^{i(k_x x - k \sqrt{1 - (k_x/k)^2} (z+\Delta z))} dk_x \\
 &= E(x) \int E(k_x) e^{i(k_x x - k \sqrt{1 - (k_x/k)^2} z)} e^{-i k \sqrt{1 - (k_x/k)^2} \Delta z} dk_x
 \end{aligned}$$

In die ursprüngliche Form $E(x, z) = \int E(k_x) e^{i(k_x x - k \sqrt{1 - (k_x/k)^2} z)}$ würde also nur $z \rightarrow z + \Delta z$ und $k_z \rightarrow k$ eingetragt. Die Integration über alle erlaubten Werte k_x erfüllt, da es nur einen einzigen gestrahlten Wert k_x gibt!

4.1.2 Transformation der Wellenfront

Man hat eine Ebene mit Brennweite f einer Punktquelle, also eine Kugelwelle mit Radius $r(x, z) = \sqrt{z^2 + x^2}$ in einer Ebene $z=0$ mit Phase $\phi(x, z) = k \cdot \sqrt{z^2 + x^2} + \text{const}$ zu transformieren?

Um das leichter sehen zu können, schneidet man parallel zur x -Achse einen Strahl $\text{mit } z = \sqrt{f^2 - x^2}$. Es hat man eine ebene Ebene mit großer f und kleine Strahlenschiefe α . Man erhält wieder $\sqrt{f^2 - x^2} \approx f - \frac{x^2}{2f}$.



Man erweitert sich die Transformation also eine um π , veränderte Wellen bei $z = -f$

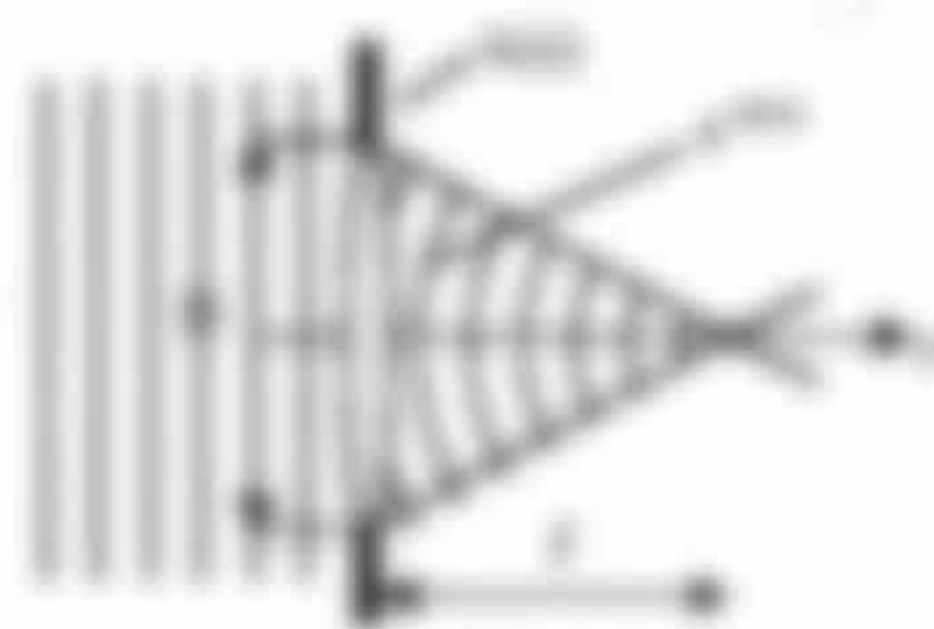
Die Wellen bei $z = -f$ lautet, ist

$$\phi(x, z) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) + k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right)$$

Die komplexe Transmissionsfunktion $T(x) = A(x) \cdot e^{-ikz}$ der Ebene mit Durchmesser $2a$ ist

$$T(x) = \text{exp}\left(-ikz \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) = \text{exp}\left(-ik \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right)$$

Verwandelt man wieder den Strahlenschiefe, so wird auf die bekannte Feldverteilung bei $z = 0$ des Modens $\text{exp}(ikz) = 1$ der Transmissionsfunktion des Elements $T(x)$ aufgetragen, um die neue $\text{exp}(ikz) = 1$ bei $z = 0$ des Modens bei $z = 0$ (Phase im Abstand z zu erhalten $\text{exp}(ikz) = 1$)



Vermeidung man die unrichtigen Phase $\text{exp}(ikz)$ und $\text{exp}(ikz)$, erhält man

$$\phi(x, z) = \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right) \quad (4.46)$$

Falls man $z = -f$, so erhält man bei Beugung an der hier unrichtigen von Punkten

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right) \\ &= k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right) \end{aligned}$$

Das stellt eine ebene Wellen dar, die in Richtung z propagiert. Durch weitere Propagation bei $z = 0$ wird die Wellen wieder um $\text{exp}(ikz) = \text{exp}(ikz)$ phasenschieben.

Man findet die Transmissionsfunktion $T(x)$ der Punktquelle bei $z = 0$ $T(x) = A(x) \cdot \text{exp}(ikz)$

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x) \cdot \text{exp}(ikz) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right) \\ &= k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \right) \cdot \text{exp}\left(-k \cdot z \right) = k \cdot \text{exp}\left(-k \cdot \left(\sqrt{f^2 - x^2} + z \right) \right) \end{aligned}$$

4.6. Lichtbrechung in inhomogenen Medien

Wichtige Frage: Phasengeschwindigkeit im Ortsraum + Propagation im Frequenzraum

Erklärung: inhomogen, d.h. räumlich veränderliche Lichtbrechung in inhomogenen Medien.

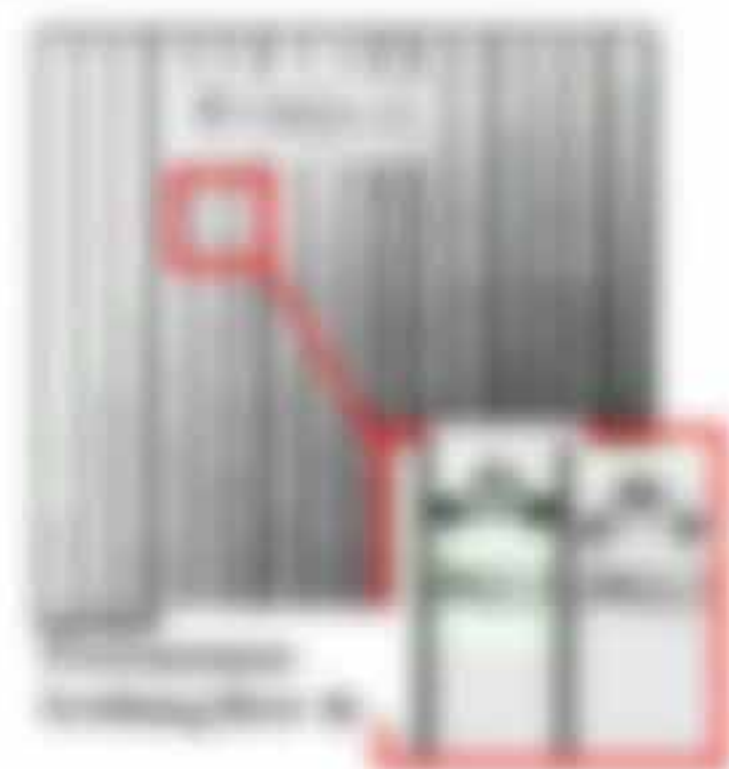
Wichtig hier ist die Phase einer Welle (z) laufender Welle durch ein transparentes Objekt der Dicke $d(x, z)$ und der Brechungsindexverteilung $n(x, z)$ beliebig ändern:

$$\Delta\phi(x, z) = k \cdot d(x, z) \cdot n(x, z) \quad (4.46)$$

Insbesondere beeinflusst die Phase einer Welle eine Lichtbrechung mehr als ihre Amplitude, was für optische Gitterstrukturen (DHO) Gitternetze oder z.B. bei Brechungen in der Biologie bzw. in der Astronomie erhebliche Auswirkungen hat.

Wichtig: Zylinderwellen: ungerichtete Lösung mit $k = 1/\lambda$, Wellen im Mittel mit $n = 1$ (z.B. nach Zylinder und Zustand der Zylinder, es geht sich der Brechungsindex um $n = 1.01$ ändern. Hierin wird also der Brechungsindex in einem konstanten Mittelwert und eine ungerichtete Variation anliegt:

$$k(x, z) = (k - \Delta k(x, z)) + k' + j \Delta k''(x, z) \quad (4.47)$$



Wichtig ergibt sich für die Propagation im Ortsraum über die Strecke d nach (4.46) mit $\Delta\phi(x, z) = k \cdot d(x, z) \cdot n(x, z)$

$$\Delta\phi(x, z) = d(x, z) \cdot \Delta k(x, z) + \Delta\phi(x, z) + \Delta\phi(x, z) \quad (4.48)$$

Nach der Eq. (4.48) entsprechende Führung im Ortsraum führt sich auch eine Propagation im Ortsraum unter einer Verteilung, siehe (Fock, Fock, 1970):

$$\Delta\phi(x, z) = d(x, z) + \Delta\phi(x, z) + \Delta\phi(x, z) \quad (4.49)$$

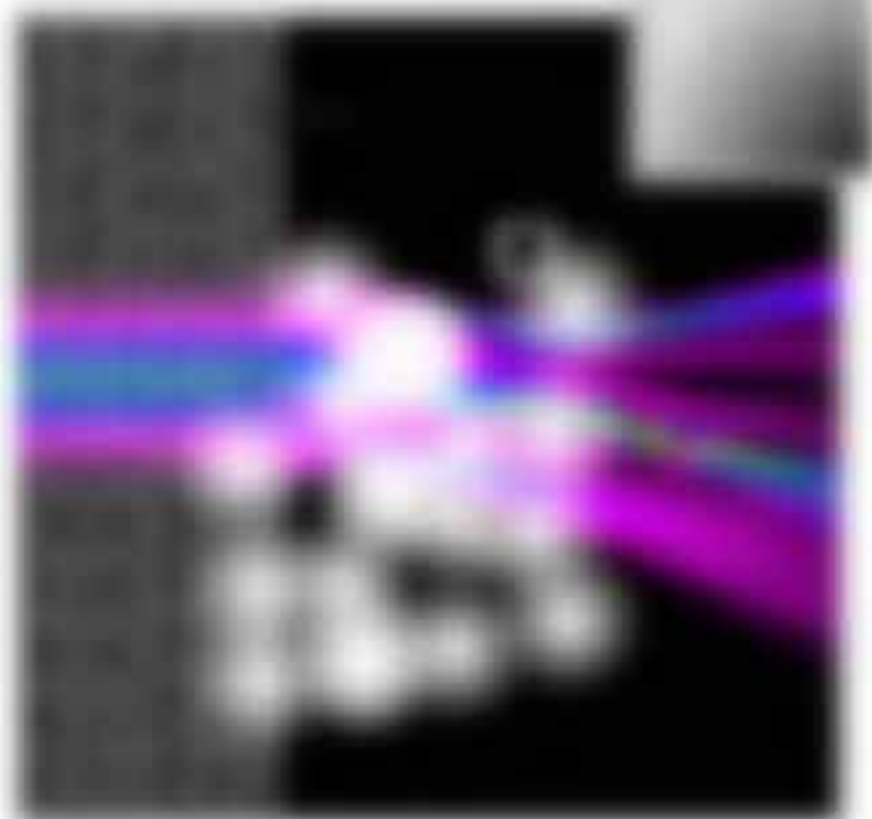
Wichtig ist die Längsrichtung $\Delta\phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$ die gesamte Phasengeschwindigkeit um $-\Delta\phi(x, z)$. Durch die gesamte Verteilung $\Delta\phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$ der Welle in (4.48) ergibt die Phasengeschwindigkeit $\Delta\phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$ nach (4.48) folgende Form:

$$\Delta\phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \Delta\phi(x, z) + \Delta\phi(x, z) \quad (4.50)$$

Dies ist die Phasengeschwindigkeit der Welle. Die Phasengeschwindigkeit (PVG) nach (Fock, Fock, 1970): Die Phasengeschwindigkeit $\Delta\phi(x, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$ wird an jeder Stelle x im Ortsraum aufgeführt, nach (4.48) wird die Welle in jeder Phase zur nächsten Phase $x+d$ mit dem konstanten Brechungsindex n propagiert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\Delta\phi(x, z)$ wird also jeweils eine PVG zur Propagation und eine PVG für die Phasengeschwindigkeit $\Delta\phi(x, z)$ dargestellt („Phasengeschwindigkeit“). Man schreibt und propagiert:

$$\Delta\phi(x, z) = d(x, z) + \Delta\phi(x, z) + \Delta\phi(x, z) \quad (4.51)$$

Durch die Wirkung des Gitters $d \cdot \sin \theta$ entsteht ein Phasenfaktor, der durch diese Ausbreitungsgeschwindigkeit λ gering gehalten werden muss. Es ergibt sich die Bedingung $d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$, $\theta = \arcsin(m \cdot \lambda / d)$. Die Gitterkonstante d ist die Gitterabstände $a = 2d$ (z.B. $a = 0,2$) mit einem Faktor $d = a/2 = 0,1$ (z.B. $d = 0,1$ wenn $a = 0,2$) $\rightarrow 0,1 \text{ nm}$ ($a = 0,2$)



Beugung am Gitterkonstanten d (Abstand a) und λ sind auf einer halben Wellenlänge $\lambda/2$ (z.B. $\lambda = 0,2$) mit einem Faktor $d = a/2 = 0,1$ (z.B. $d = 0,1$ wenn $a = 0,2$) $\rightarrow 0,1 \text{ nm}$ ($a = 0,2$)

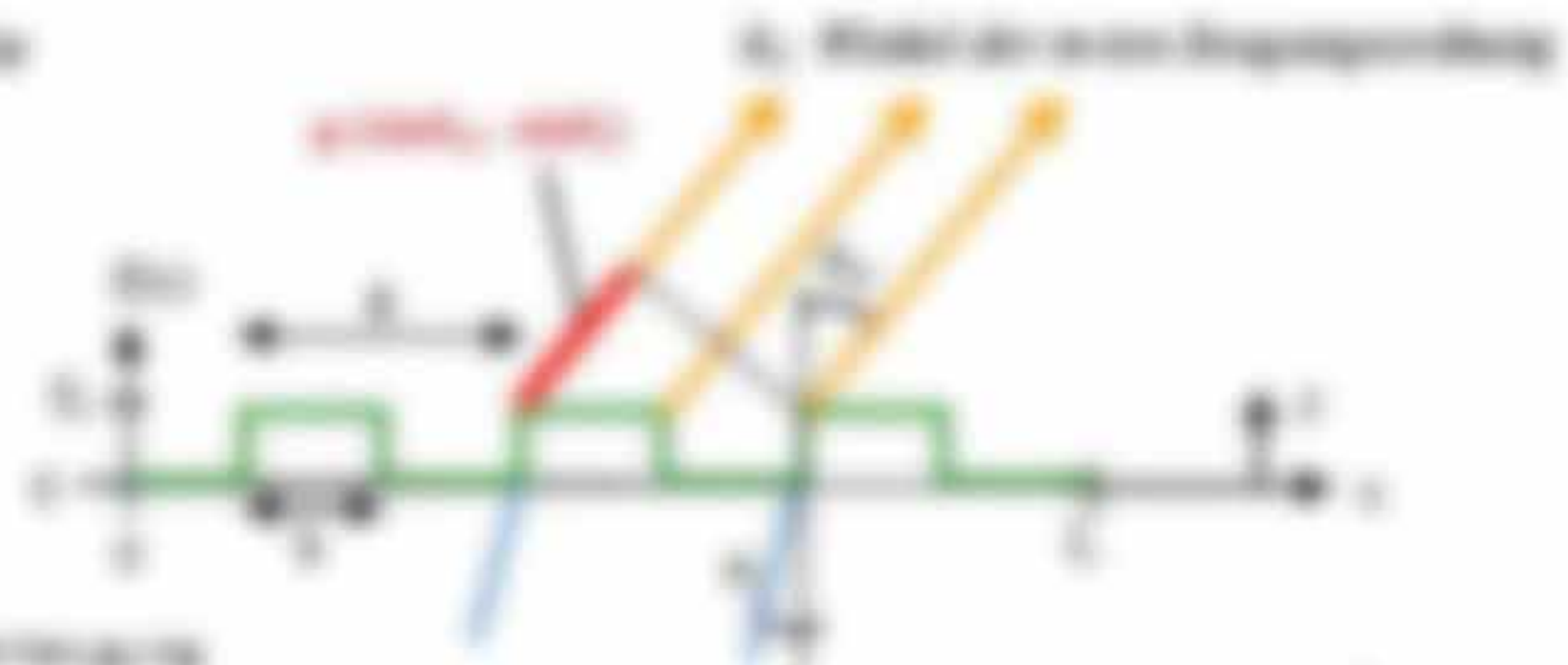
4.7. Beugung am Gitter

Wie bei einem Prisma, lässt sich Licht nach Winkel und Farbe optisch sortieren, aber nach $\lambda = d \cdot \sin \theta$ und es Prinzip ist, dass möglichst viele Teilchen konstruktiv interferieren!

Betrachte zunächst ein Transmissions-Beugungsgitter, welches sich in der bekannten Form

$$f(x) = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{d} x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{d} x\right) + \dots \right] \cos(kx) \quad (4.50)$$

- a) $\lambda = d \cdot \sin \theta$ (Bedingung)
- b) $\lambda = d \cdot \sin \theta$ (Bedingung)
- c) $\lambda = d \cdot \sin \theta$ (Bedingung)
- d) $\lambda = d \cdot \sin \theta$ (Bedingung)



Beugung am Gitterkonstanten d

Der Haupt- und der erste Nebenmaxima sind auf das Gitter und die gesamte Phase übertragen. Es gilt wieder die Bedingung $d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$.



$$d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda \quad (4.51)$$

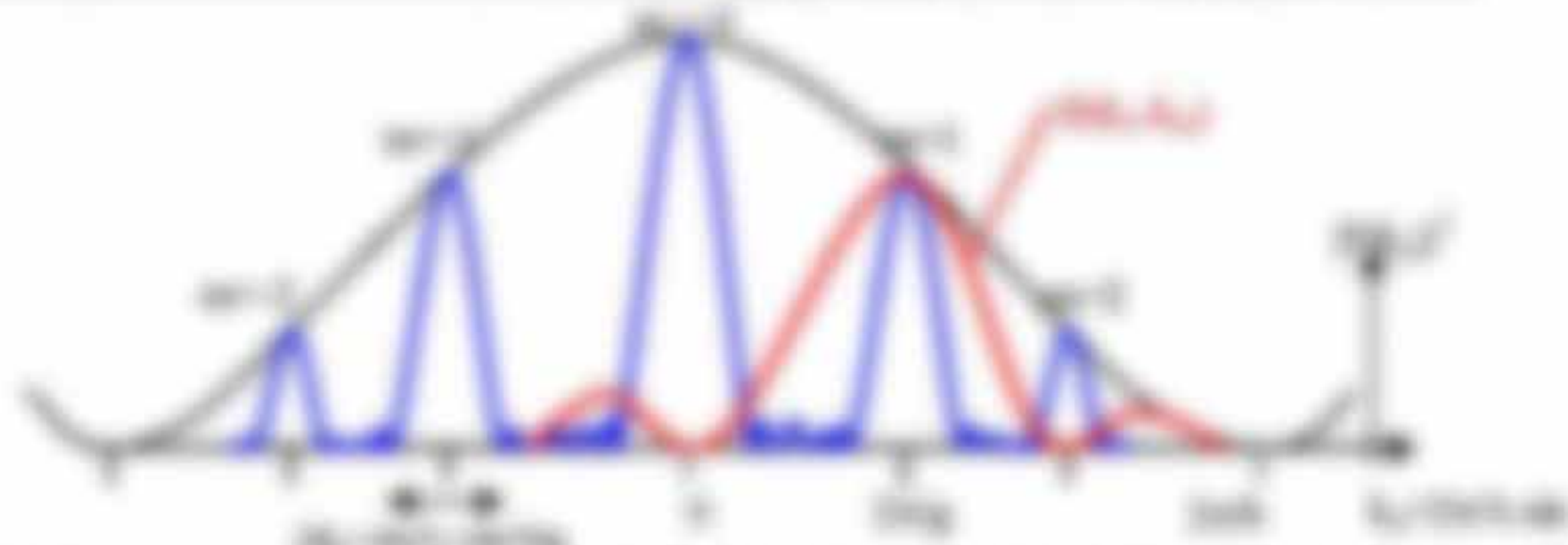
Folgt durch $d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$ und Auflösen nach θ liefert die Gittergleichung

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m \cdot \lambda}{d}\right) \quad (4.52)$$

Man erhält also ein farbiges konstruktives Interferenz der am Gitter einfallenden Lichtwellen, wenn die Gitterkonstante d (z.B. $d = 0,2$) ein Vielfaches n von λ ist. Das bedeutet, Licht wird nur in bestimmten Richtungen abgelenkt und das Gitter selbst nur konstruktiv interferieren!

Das Gittergitterspektrum aus der Fouriertransformierten von $I(x)$ lautet

$$F(k_x) = \Delta \left[\underbrace{A \cos(\phi_1 - k_x)}_{\text{Gitter}} + \underbrace{g \cos(\phi_2 - k_x)}_{\text{Gitter}} \right] \underbrace{F_{\text{Struktur}}(k_x)}_{\text{Struktur}} \quad (10)$$



Beziehung zu Beugungsgleichung: Die Beugungswinkel θ sind durch die Beugungsgleichung $d \sin \theta = m \lambda$ gegeben, wobei d die Gitterkonstante ist.

Wiederholung: Die Beugungswinkel θ sind durch die Beugungsgleichung $d \sin \theta = m \lambda$ gegeben.

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (11)$$

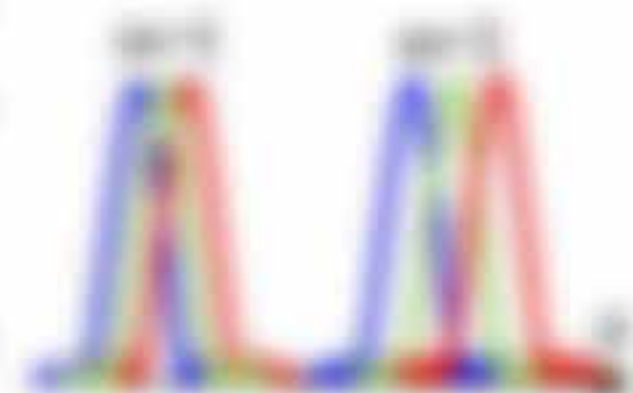
Wichtige Formeln für Beugungsgitter

a) Die Winkelauflösung $\Delta \theta$ des Gittergitters ist bestimmt über die Winkelbreite des Beugungsspektrums bzw. der Gitterstruktur (siehe Beziehung 10 und 11) (10)

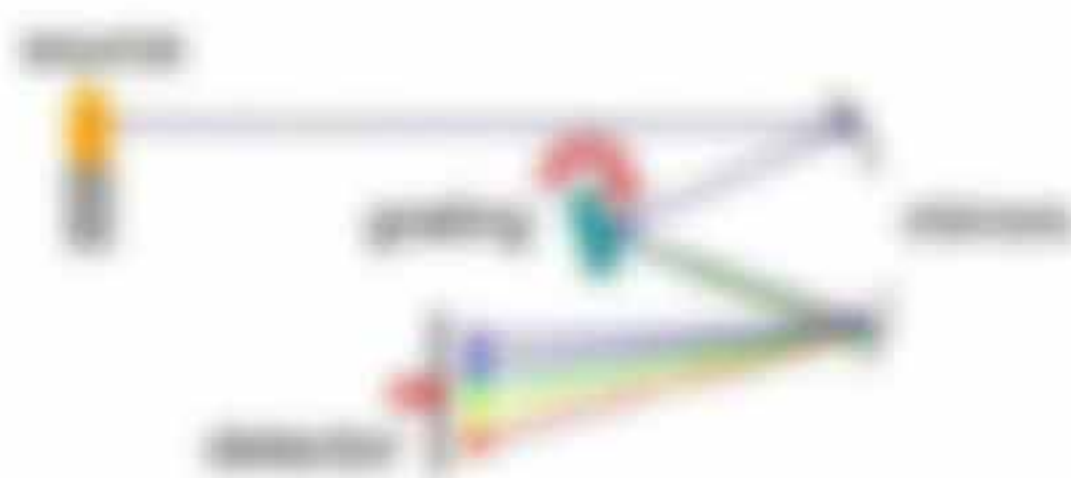
$$\Delta \theta \approx \lambda \frac{1}{d \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta} \quad \text{wobei } \Delta \theta \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta} \quad (12)$$

b) Die Winkelauflösung $\Delta \theta$ über die Winkeländerung $\Delta \theta$ der Beugungswinkel mit der Farbe λ mit λ oder $\lambda + \Delta \lambda$ ergibt sich aus (12) zu $\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta}$ (13)

$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{d \sin \theta} \quad (13)$$



c) der Winkelbereich zwischen zwei Linien und damit ihre Trennbarkeit hängt mit höherer λ Gittergitterstruktur bzw. der bevorzugt höhere Beugungswinkel θ



Beziehung zu Gittergitterspektrum: Die Winkelauflösung $\Delta \theta$ ist durch die Beugungsgleichung $d \sin \theta = m \lambda$ gegeben, wobei d die Gitterkonstante ist.

d) Die Beugungseffizienz $\eta = \sum P_m / P_0$ ist das Verhältnis der Intensitäten der Beugungswinkel m und eingestrahlt $m=0$ Licht.

24. Das optische Aufblendelement $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda, d)$ eines Gittergitters ist erreicht, wenn zwei benachbarte Punkte des Abstand d , die einen Winkel α aufspannen, die Phase 2π unterscheiden.



$$\frac{d \sin \alpha}{\lambda} = \frac{d \sin \alpha}{\lambda} = m \cdot \lambda \Rightarrow d \sin \alpha = m \cdot \lambda$$

$$d \sin \alpha = m \cdot \lambda \quad \text{oder} \quad \frac{d \sin \alpha}{\lambda} = \frac{m \cdot d \sin \alpha}{\lambda} = m$$

25. Die optische Auflösung steigt mit der Ordnung m und umkehrt λ , welche innerhalb des Beugungswinkels liegen!

Phase-Matrix

Neben der Amplitudengitter mit $E = f(x)$ gibt es die Schraffur-Gitter (Phasengitter) mit $E = e^{i\phi(x)}$, welche das Licht im Gegensatz zu Amplitudengittern vollständig durchlassen oder reflektieren (Reflexionsgitter). Somit ändert sich nur die Phase und damit das Beugungsspektrum der Gitter.

Rechenweise ist auch $e^{i\phi}$ in der Regel einfache Fouriertransformationen leicht, verlangt man den Phasenterm häufig in einer Taylor-Reihe

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi(x) - \frac{1}{2}\phi(x)^2 + \dots$$

und transformiert die einzelnen Summanden. Falls der Phasenterm klein ist, also wenn $|\phi(x)| \ll \pi$, dann erhält man $e^{i\phi} \approx 1 + i\phi(x)$.



Bei ungeraden Phasengittern, mit den beiden Phasentermen $\phi = \pm \pi$, gibt es noch eine $m = 0$, die man Phasengitter durch das Gitter.

Beugungsgitter

Interessanterweise kann man die gefilterte Energie hauptsächlich in eine Beugungsordnung m steuern, wenn man die Phasendifferenzen der Teilstrahlen richtig einstellt.

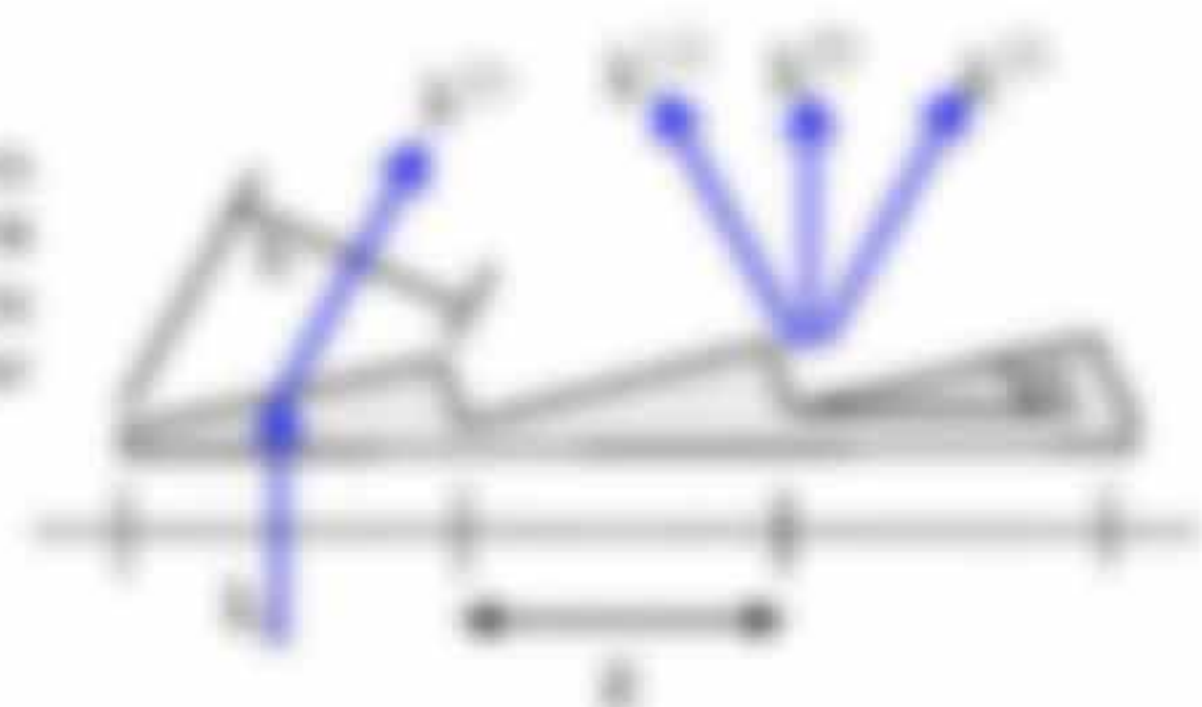
Wie in Abbildung 12 zu sehen, hat man eine Kombination aus beugendem Gitter und Filter g und einem, brechenden Prisma mit Phasenwert ϕ , die hier nur Licht in die 1. Beugungsordnung in Richtung \mathbf{k}^1 lenken. Man führt effektiv also eine Filteroperation im Spektrum durch und zwar mit dem Filter $\mathcal{F}(k_x = k_x^1)$, $k_y = \omega/c \sin \alpha$. Dies funktioniert nur bei Phasengittern (also auch Reflexionsgittern).

Mathematisch gesehen multipliziert man das Spektrum $F(k_x)$ mit der Filterfunktion $\mathcal{F}(k_x = k_x^1) = \text{sinc}(g(k_x - k_x^1)/2g) \cdot \mathcal{D}$, welche in Abbildung 12 dargestellt ist. Dies führt physikalisch dazu, dass andere Beugungsordnungen sich ausbreiten! Die

Operatoren $F(x, y)$ ($F(x, y) = \delta_{x, y}$) bedeutet im Intervall $[0, 2\pi]$ $F(x, y) = \delta_{x, y}$ (aufsteigende Kurve) wobei $\delta_{x, y} = \delta_{x, y} \cdot \delta_{x, y} = 1$ (siehe Seite 10, 11, 12) und δ die Funktion bzw. Parameter ist.

Die Modulation mit $\exp(i \cdot k \cdot x)$ entspricht also einer schrägen Betrachtung des Othello bzw. einer Wave-Struktur des Phasensystems.

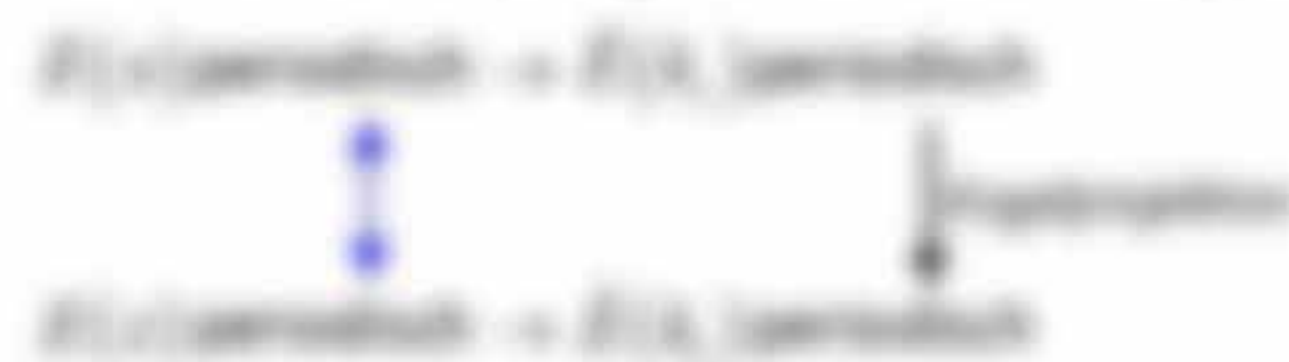
Beziehung zu bekannten Phasensystemen: Durch Erzeugung des ersten $\delta_{x, y}$ verändert sich die Bewegung nicht, da beide sich in der ersten Bewegungsrichtung. Die zweite $\delta_{x, y}$ ist verbunden zum getragenen $\delta_{x, y}$ durch $\delta_{x, y}$ der Parameter $\delta_{x, y} = \delta_{x, y}$ verändert.



Erzeugung von periodisch angeordneten Teilchen

Erzeugung von periodisch angeordneten Teilchen: Die mit der Periode λ ist ein periodisches Feld $F(x) = \cos(2\pi \cdot x / \lambda)$ erzeugt auch ein periodisches Feld $F(x) = \sin(2\pi \cdot x / \lambda)$ mit der selben Periode **10, 11, 12**.

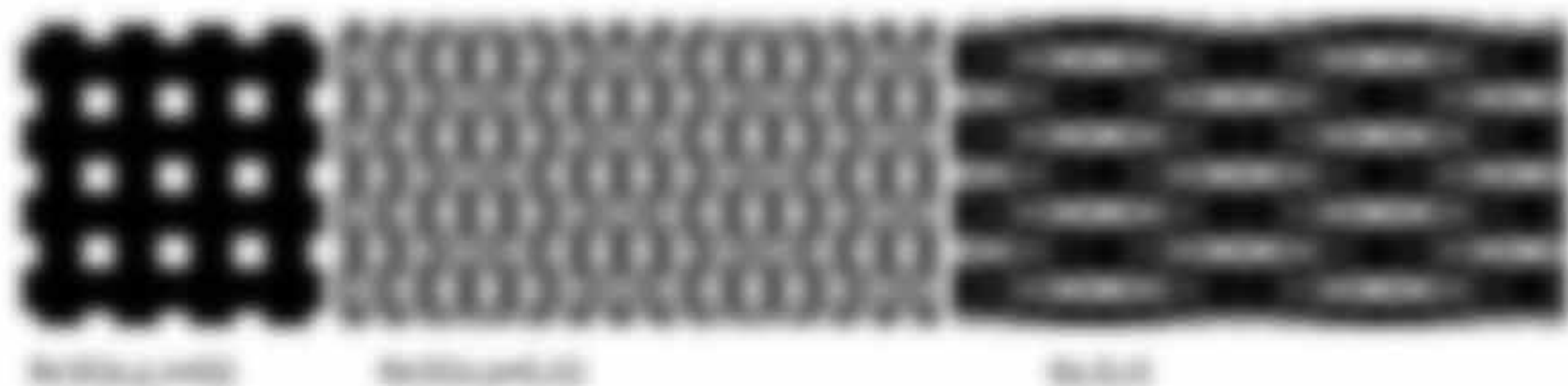
Betrachtung über Projektion auf Kreisbogen



Beziehung zu $\exp(i \cdot k \cdot x) = \cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x)$, da die Kreisbogenprojektion entlang k , wird über die Translation (siehe Diagramm) in Richtung k in Richtung k projiziert.

$$\frac{d}{dx} \cos(k \cdot x) = -k \cdot \sin(k \cdot x) = -k \cdot \sqrt{1 - \cos^2(k \cdot x)} = -k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{F(x)}{A}\right)^2} = -k \cdot \sqrt{1 - \frac{F(x)^2}{A^2}}$$

Somit gilt für die Teilchenge in periodischer Bewegung **10, 11, 12** **10, 11, 12**



Beziehung zu einer über diese periodischen Bewegungen, werden in einer schrägen Projektion periodische Strukturen in Bewegung erzeugt. Diese sind durch die Bewegung des Othello-Symbols gegeben.

4.8. Akousto-Optik

Eine Ultraschallwelle, die eine akustische Wellen, läuft durch einen Kristall z.B. LiNbO₃, oder Flüssigkeit und erzeugt eine periodische Schwingungsbewegung und damit eine periodische Brechungsindexänderung (eine Bragg-Gitterstruktur), an der Licht gebragt wird.



Die Intensität des gebragten Lichtes $I_{\pm 1} = |E_{\pm 1}|^2$ steigt mit der Amplitude $A_{\pm 1} = \varphi_{\pm 1}$ der Ultraschallwelle sowie der Intensität $I = |E|^2$ des einfallenden Lichts, so dass die Bragg-Effizienz $\eta = I_{\pm 1}/I$ von $A_{\pm 1}$ abhängt ($\eta = \text{faktor}$)

$$I_{\pm 1} = I \sin^2(\frac{\pi}{2} \sin^2 \theta) \quad (4.8.1)$$

Braggung an Interferogitter

Es entsteht ein Bragggitter durch die Ordnung n , falls die Bragg-Bedingung erfüllt wird:

$$2d \sin \theta = m \lambda \quad \text{mit } d = \text{Gitterperiode} \quad (4.8.2)$$

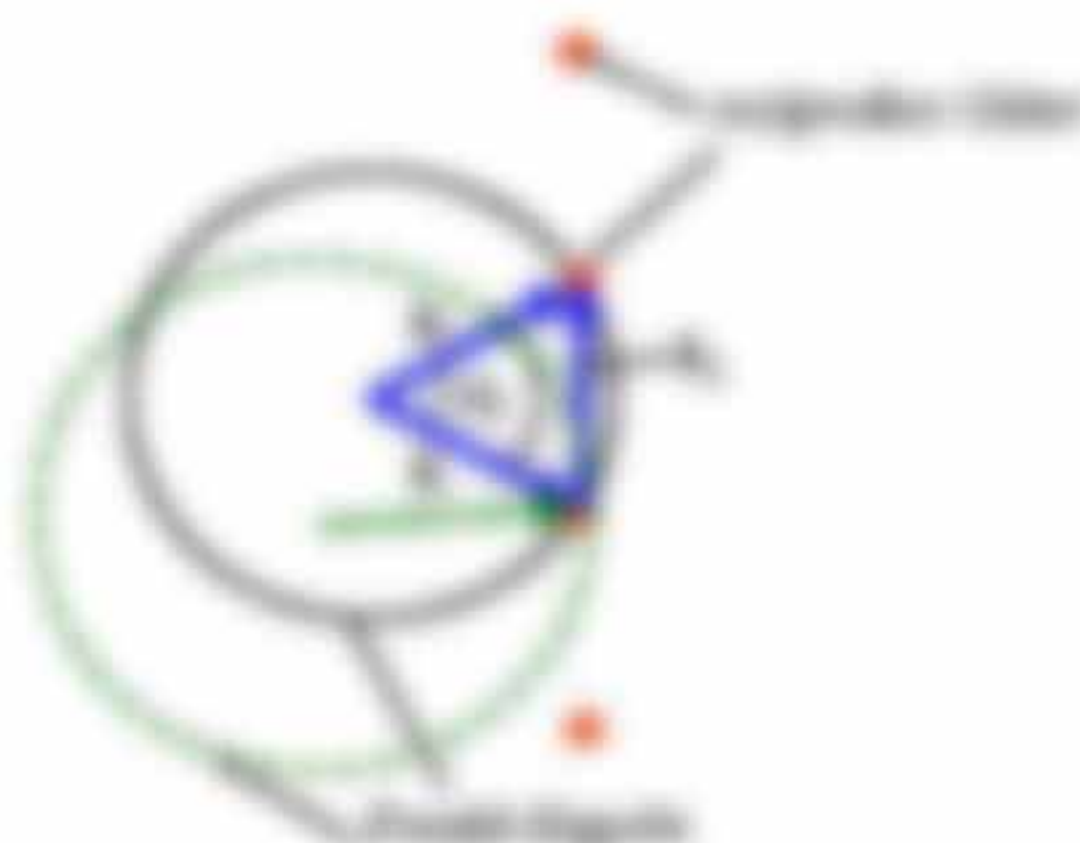
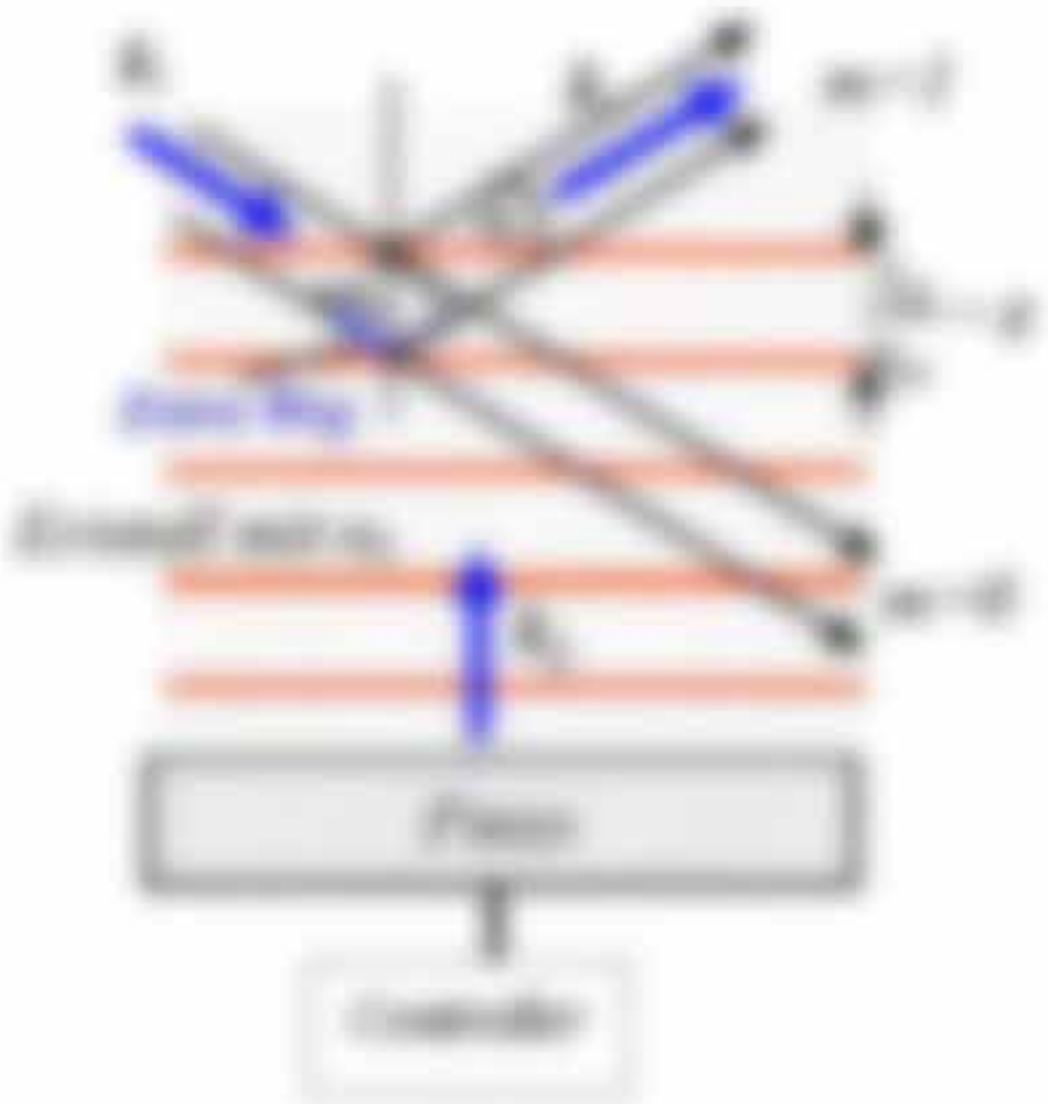
Die Gitterperiode d entspricht der Schichtabstände λ_1 / n_1 mit n_1 akustische Brechzahl des Kristalls. Die Braggwinkel θ $n_1 \sin \theta = \lambda / 2d$ θ steigt mit der Schichtabstände $\lambda_1 / n_1 = d$ und steigt mit der Lichtwellenlänge λ .

Phasenanpassung

Das Phasor mit $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ erfüllt an das Phasor mit k . $k_x = k_{x1} = k_x$ (4.8.3)



Quasi-Kontinuität: Die Quasi-Kugel mit Radius $k_1 = k_1$ schneidet die reziproke Gitter mit Perioden $k_g = k_x$ ($k_x = 2\pi/\lambda_1$) und liegt somit der Braggwinkel θ fest.



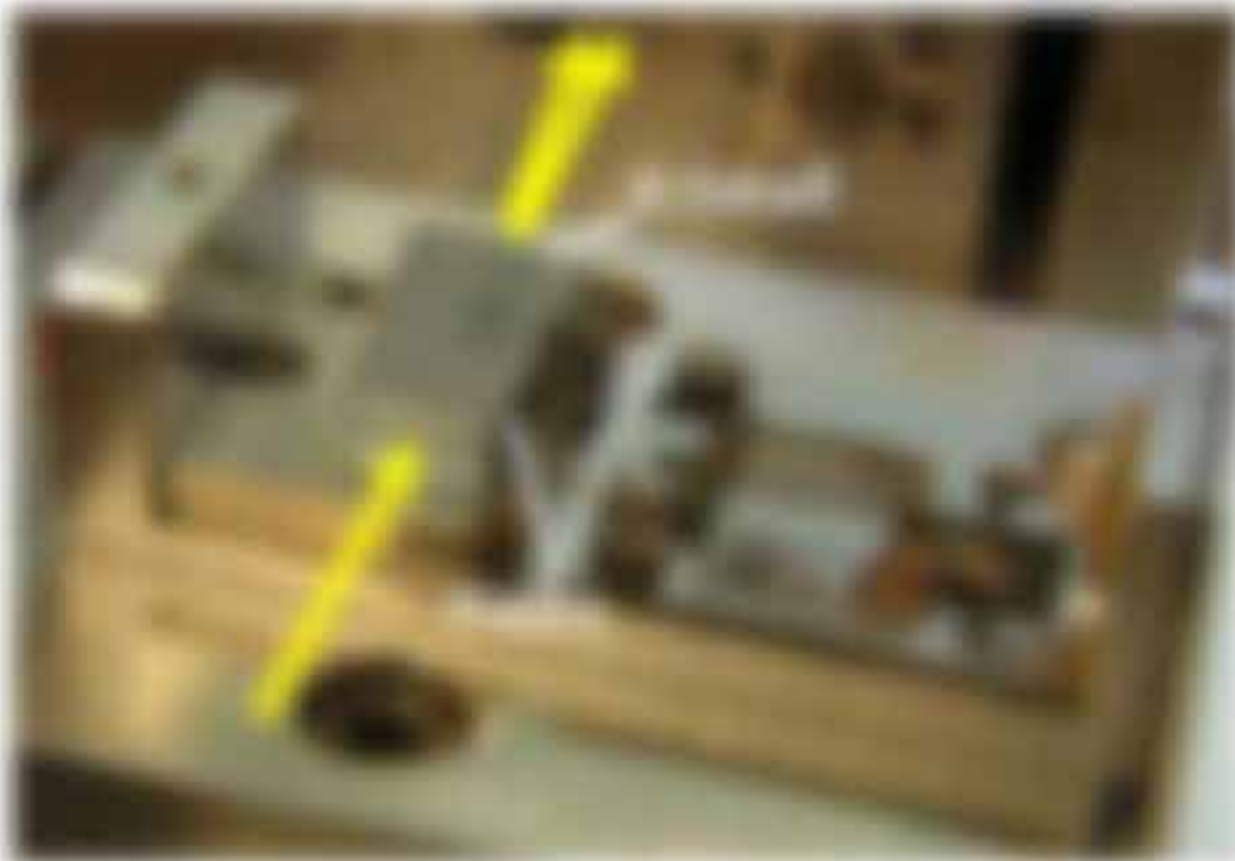
Bedingung für Braggwinkel $k_x = k_x$ an Interferogitter (Gitter) und an der Braggwellenlänge, dem reziproken Gitter (Gitter). Bei einem der Phasor des reziproken Gitters die Braggung ankommt, wird durch den Gitter auf die Phasoren übertragen. Dies ist nicht der Fall für den gebrochenen Braggwinkel mit k_x (Gitter) wenn es ankommt = 20% und wenn andere Wellenlängen vor.

Erregerschaltung: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$

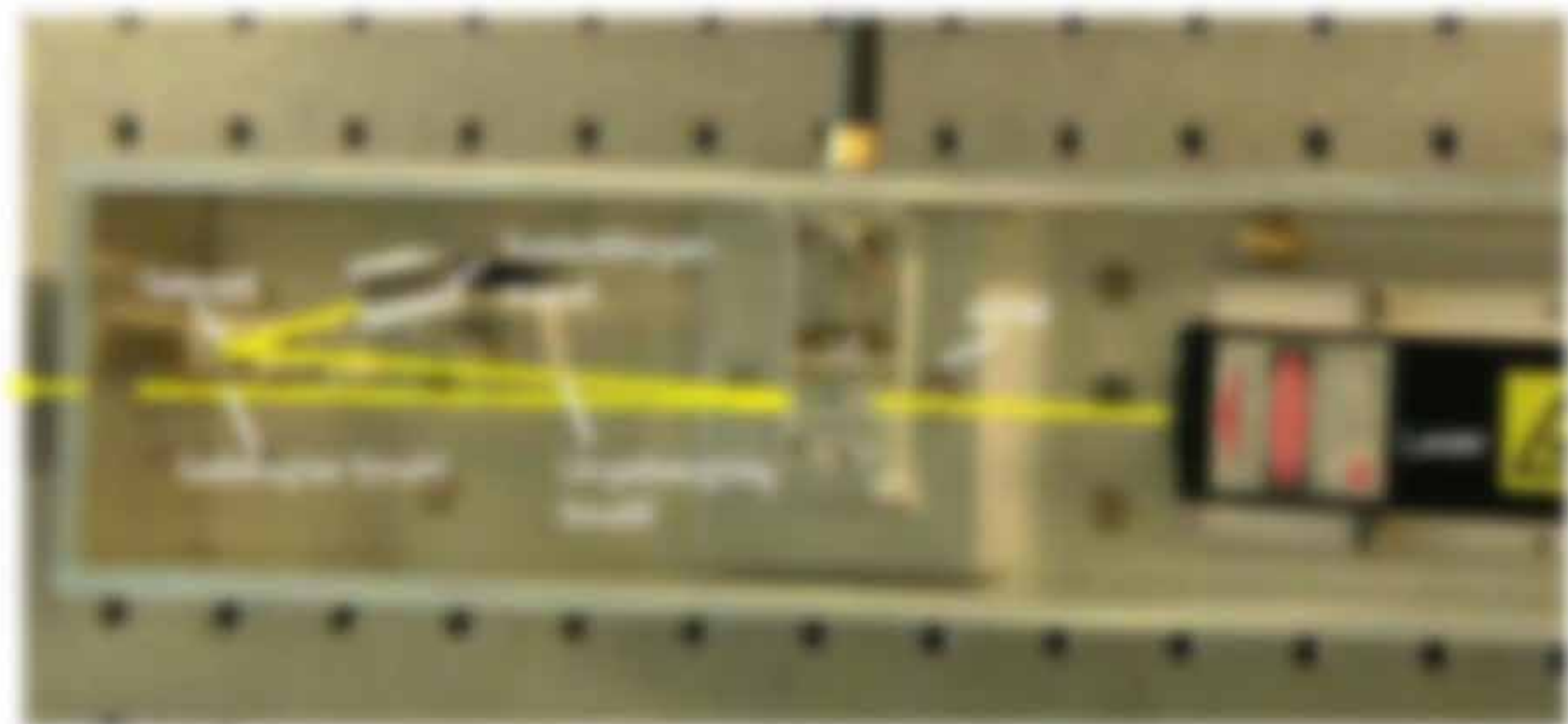
z.B. nach dem Start hat das getriebene Licht eine um f geringfügig andere Frequenz $\omega_1 \neq \omega_2$
 (ω = Frequenzänderung in der Atomphysik). Der Frequenzwert ω_1 mit $\omega = \omega_0$ und

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0 = 2\pi \cdot 500 \cdot 10^12 \text{ s}^{-1} \quad (2.40)$$

und wird über die Frequenz der Ultraschallwellen (20 MHz = $2 \cdot 10^7$ s⁻¹) und ihre Schwingungszahl $\omega_2 = f \cdot \lambda_2 / \lambda_1$ einstellbar ($\lambda_2 = 2000 - 4000$ nm).



Steuerung ist über den getriebenen Motor über ein Kabel übertragung über mehrere Abzweigungen
 eines Strom- zum Frequenzwert, so dass der Start der Licht-Regulierung in Frequenzwert
 einsteuert und mit der Start der Licht-Regulierung zum nächsten Lichtwert geht.



Anforderungen

- Atomoptische Modulatoren (AMM) → Lichtschalter in geschlossenen Lasern
 → Laserstrahl zur Positionierung
- Atomopt. Variable Filter (AVF) → für mehrere Regenerierung
- Atomopt. Deflektoren (AD) → Strahlsteuerung über Änderung von λ_2

4.3. Spezielle Lichtmodulatoren

Ein Wellen $E_{in}(z,t) = E_0 \exp(i(kz - \omega t))$ soll optisch in $E_{out}(z,t)$ moduliert werden, um typischerweise eine geometrische Intensitätsverteilung $I(z) = |E_{out}(z)|^2$ zu erhalten.

Wenn sich nicht entweder $k(z,t)$ oder $\omega(z,t)$ verändern, sollte es meist ausreichen, die Transmissivität über $T(z,t) = 1$ realisieren zu können, um den Licht zu verformen.

4.3.1. Funktionsweise eines optischen Lichtmodulators (OLM)

Neben der Amplitude können sich Liquid Crystals an Blauen Anlegen die Phase $\phi(z,t)$ einer einfallenden Welle prozentweise je nach lokal angelegter Spannung verändern – ähnlich einem CCD, nur im Reflexionsmodus. Eine flüssigkristalline Schicht (LCoS besteht aus zwei) zwischen einer reflektierenden und transparenten Elektrodenstruktur ändert hierbei prozentweise ihre Brechungsindizes $n(z,t)$ durch lokale Umorientierung der Moleküle im einfallenden Feld $E_{in}(z,t)$. Das Feld kann elektrooptisch oder elektroakustisch sein (Lichtwellen) z.B. die Phase und/oder Amplitude oder optisch adressierbar.

Fig. 4.3.1

Reflexionsmodulator

(144)

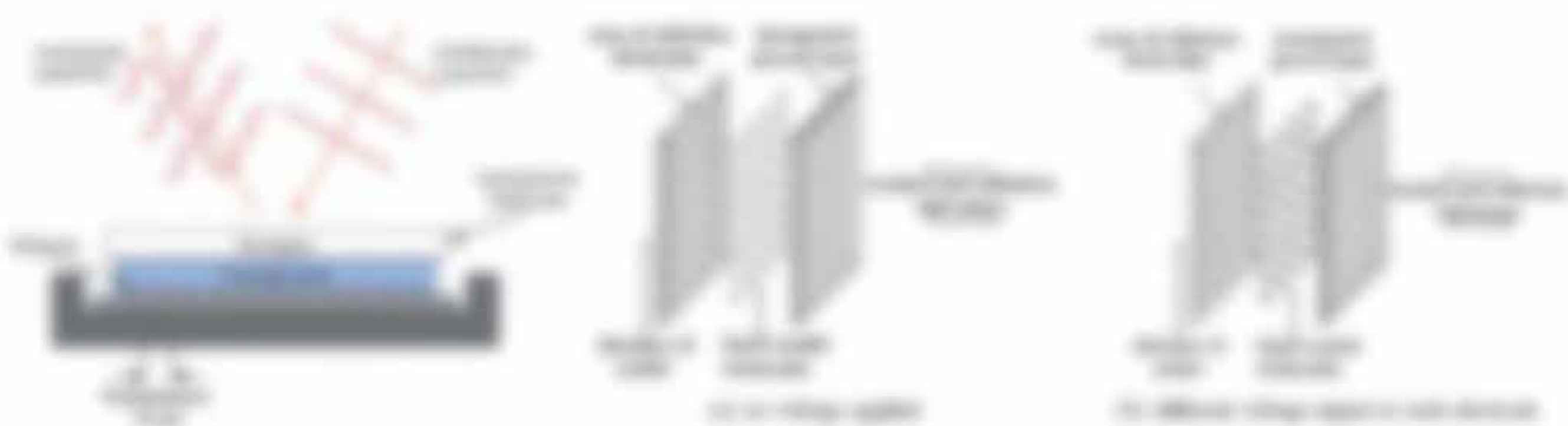


Abbildung 4.3.1: Funktionsweise eines Reflexionsmodulators und Funktionsweise eines flüssigkristallinen Schicht zwischen zwei Elektroden. Die zentrale Elektrodenstruktur wird hier als transparentes Feld verwendet, das die Brechungsindizes moduliert. In dem im Reflexionsmodus arbeitenden optischen Modulator werden beide Ausrichtungen reflektierend realisiert.

Falls eine einfallende Welle $E_{in}(z,t)$ auf den optischen Lichtmodulator (OLM), so ändert diese Transmissivität $T(z,t)$ und Phase $\phi(z,t)$, so dass für die geometrische Welle hinter dem OLM gilt:

$$E_{out}(z,t) = E_{in}(z,t) T(z,t) \exp(i\phi(z,t))$$

(145)



Abbildung 4.3.2: Darstellung einer einfallenden Welle $E_{in}(z,t)$ vor Funktionsweise eines OLM und einer einfallenden Welle $E_{in}(z,t)$ vor geometrischer Ausgeprägtheit $I(z)$ in einem Reflexionsmodus $\omega = 0$ einer flüssigkristallinen Modulatorstruktur $n(z,t)$. Rechts daneben: Strukturen für flüssigkristalline Modulatorstruktur $n(z,t)$ (links) und $n(z,t)$.

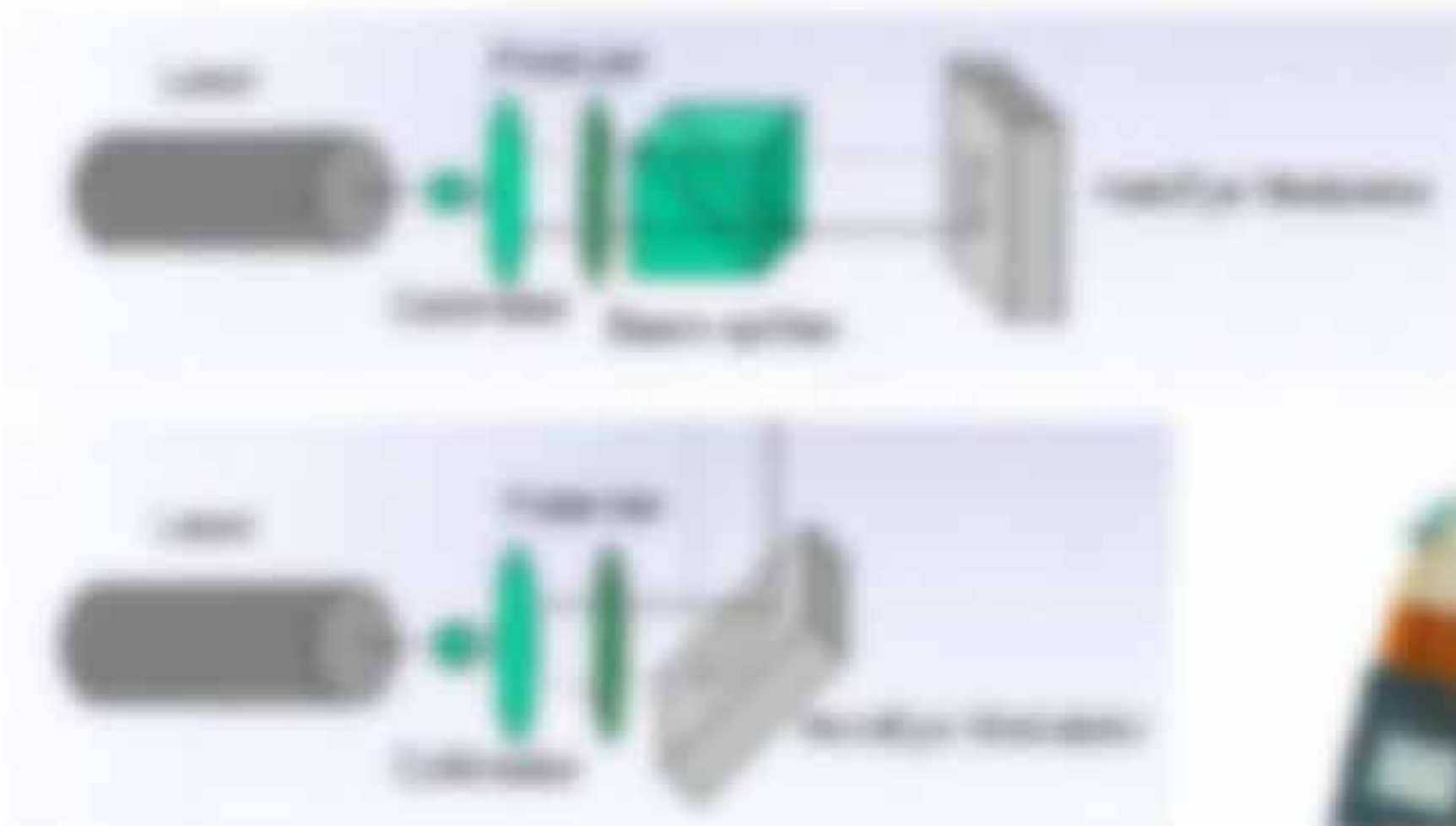


Abbildung 16: Zwei Konfigurationen für effektive Beleuchtung von Präparaten mit unterschiedlichen Objektgrößen. Links: $0 < \Delta z < \Delta z_{\text{eff}}$ mit z.B. Versuch der Verkleinerung mit geringerer Verkleinerung, besonders unter $0 < \Delta z < \Delta z_{\text{eff}}$ mit approximativ ausgeglichener Phasenhöhe und unzureichender Phasenhöhe des Beugungslichts. Rechts: $\Delta z > \Delta z_{\text{eff}}$.

Für den häufigen Fall $\Delta z \ll \lambda$ und einer Wellenlänge λ ist die Amplitude $E(x, y, z) \approx E_0(x, y) \exp(i k z)$ mit einer Laser mit Wellenlänge λ konstanter Amplitude $E_0(x, y) \approx E_0$ hat die ausstrahlende Welle die einfache Form $E(x, y, z) \approx E_0 \exp(i k z)$.

Für den häufigen Fall Betrachtungswinkel θ kleiner als Winkel Δz zwischen Z und Z_0 wird $E(x, y, z) \approx E_0 \exp(i k z) \exp(i k \Delta z)$.

4.3.2. Phasenhöhenbeziehung unter dem LHM

Typischerweise will man das Fernfeld beugungstheoretisch, $E(x, y, z) \approx E_0(x, y) \exp(i k z)$ aus der Verteilung $E(x, y, z_0)$ direkt unter dem LHM generieren, welches man durch einen $2D$ Nullfluss leicht erhält.

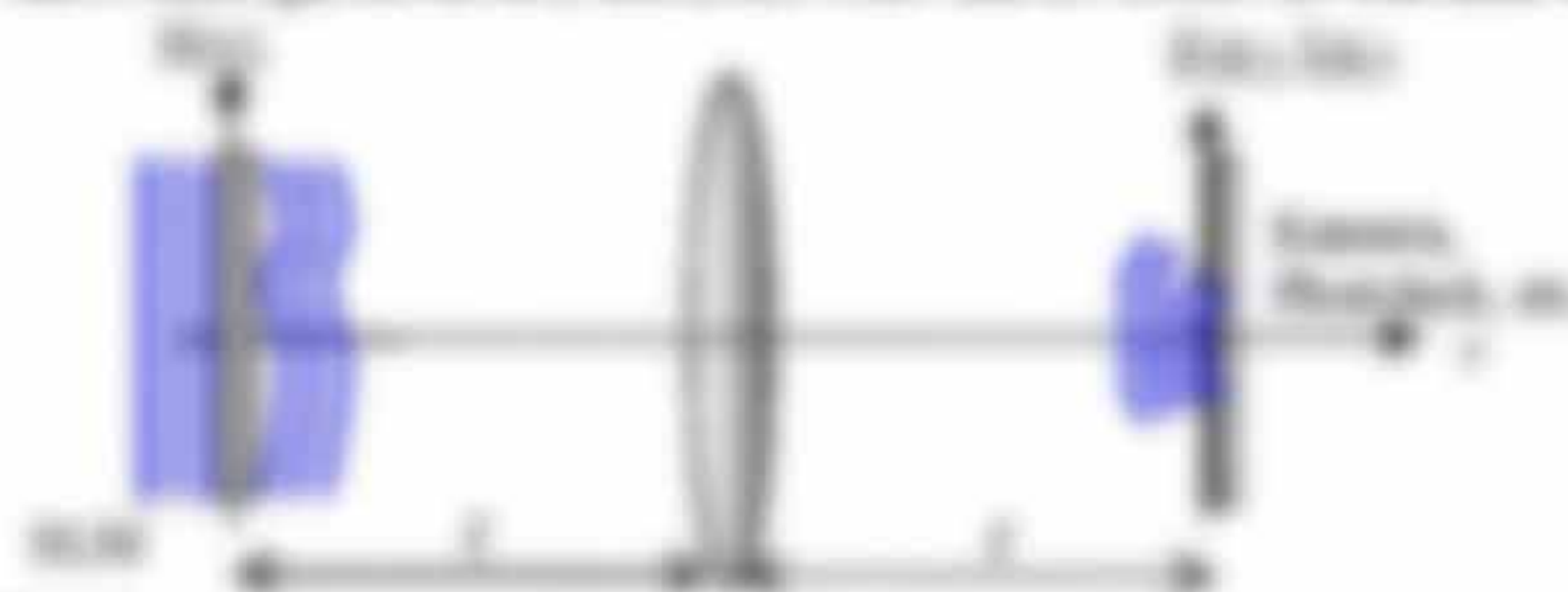


Abbildung 17: Struktur zur numerischen Beugungstheorie

Das Fourierintegral $E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x', y') \exp(i k_x x + i k_y y + i k_z z) dx' dy'$ ist numerisch auswertbar, falls $A(x, y)$ und man anschließend direkt den Phasentyp in eine Reihe $\exp(i k_x x + i k_y y) = \exp(i k_x x) \exp(i k_y y) = \dots$

Falls der Phasentyp klein ist, also wenn $|k_x| \ll k$, dann erhält man $\exp(i k_x x) \approx \exp(i k_x x)$ und man erhält für den geringsten Fall

$$E(x, y, z) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x', y') \exp(i k_x x + i k_y y + i k_z z) dx' dy' \quad (4.38)$$

4.3.3 Die Funktion der Übertragung

und der damit verbundene Aufbau von einer Beugungsgitterung \mathcal{B} (siehe hierzu die Abbildung 4.1) resultiert aus der Fokussierung des Licht (siehe die Fokussierung \mathcal{F}) und durch die Phase-Driftung verursacht - siehe geometrische Optik im folgenden Text.

Es gelten ebenfalls die Beugungsgleichungen wie folgt:

a) Die Phase $\mathcal{B}(x, y)$ erzeugt die geometrische Beugungsgitterung $\mathcal{B}(x, y)$ - $\mathcal{B}(x, y)$ werden durch mehrere erzeugt (z.B. Ringstruktur).

b) Die Beugung (Lichtstrahlung) der Phase $\mathcal{B}(x, y)$ in einem Medium \mathcal{M} erzeugt ein \mathcal{M} - unregelmäßiges Gitter mit Überstrahlungen $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$, welches zu mehreren $\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}_1(x, y)$ führt. Wenn die Licht-Phase durch ein \mathcal{M} gestreut wird (z.B. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$), dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}_1(x, y) + \mathcal{M}_2(x, y) + \mathcal{M}_3(x, y) + \dots$.

c) Die Fokussierung des Licht durch ein Phasengitter \mathcal{F} und erzeugt ein fokussiertes Beugungsgitter \mathcal{F} (siehe die Abbildung 4.1). Wenn das Licht durch ein \mathcal{F} geht, dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots$. Wenn das Licht durch ein \mathcal{F} geht, dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots$.

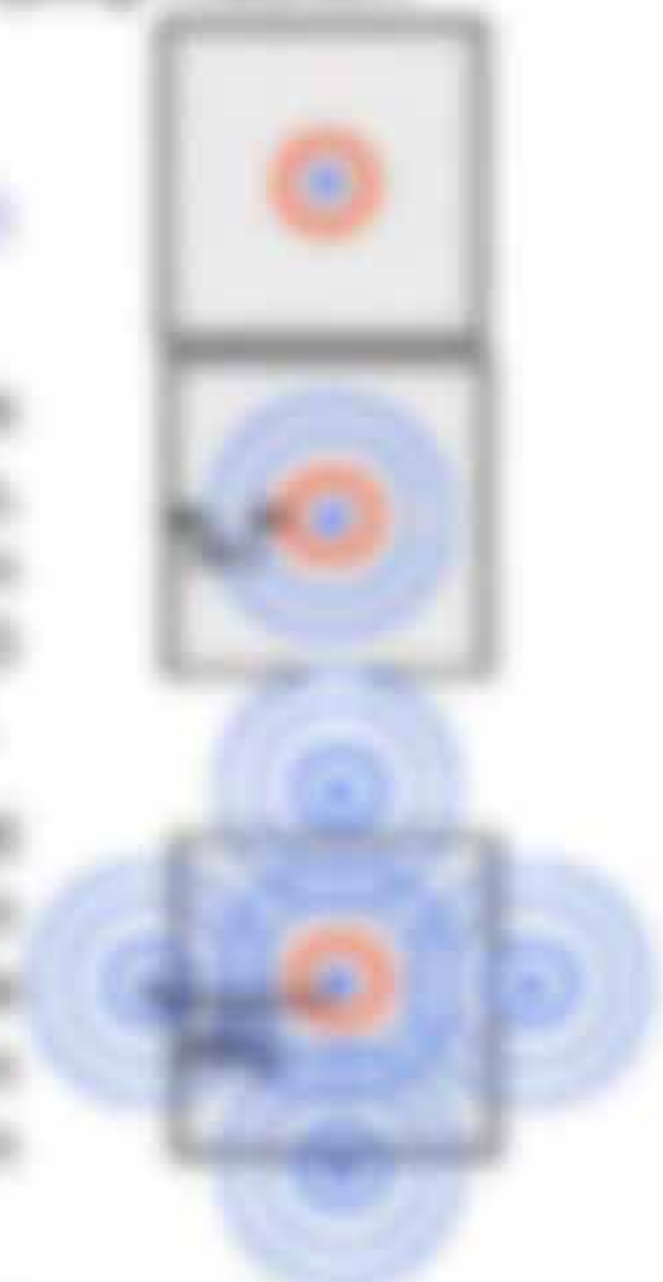


Abbildung 4.1: Schema für Beugungsgitterung. a) Die Fokussierung erzeugt ein fokussiertes Beugungsgitter \mathcal{F} (siehe die Abbildung 4.1). b) Die Fokussierung erzeugt ein fokussiertes Beugungsgitter \mathcal{F} (siehe die Abbildung 4.1). c) Die Fokussierung erzeugt ein fokussiertes Beugungsgitter \mathcal{F} (siehe die Abbildung 4.1).

Das Licht mit der Phase $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}_1(x, y) + \mathcal{B}_2(x, y) + \mathcal{B}_3(x, y) + \dots$ ergibt sich die folgende Form $\mathcal{B}(x, y)$ durch eine Reihe von Phasengitterungen des Licht (Abbildung 4.1).

$$\mathcal{B}(x, y) = (\mathcal{B}_1(x, y) + \mathcal{B}_2(x, y) + \mathcal{B}_3(x, y) + \dots) + \mathcal{B}_4(x, y) + \mathcal{B}_5(x, y) + \dots \quad (4.70)$$

Unter der hochgradigen geometrischen Annahme, dass das Licht der Phase $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}_1(x, y) + \mathcal{B}_2(x, y) + \mathcal{B}_3(x, y) + \dots$ ist, ist die Phase $\mathcal{B}(x, y)$ zu vernachlässigen. Die Fokussierungsgitterung des Licht (Abbildung 4.1) ist:

$$\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots \quad (4.71)$$

Die Beugungsgitterung $\mathcal{F}(x, y)$ wird durch die Überstrahlungen von einem \mathcal{F} erzeugt. Wenn das Licht durch ein \mathcal{F} geht, dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots$. Wenn das Licht durch ein \mathcal{F} geht, dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots$.

$$\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots \quad (4.72)$$

Die Fokussierung des Licht durch ein Phasengitter \mathcal{F} und erzeugt ein fokussiertes Beugungsgitter \mathcal{F} (siehe die Abbildung 4.1). Wenn das Licht durch ein \mathcal{F} geht, dann sind die Überstrahlungen $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_1(x, y) + \mathcal{F}_2(x, y) + \mathcal{F}_3(x, y) + \dots$.

Struktur des Blau-Filter

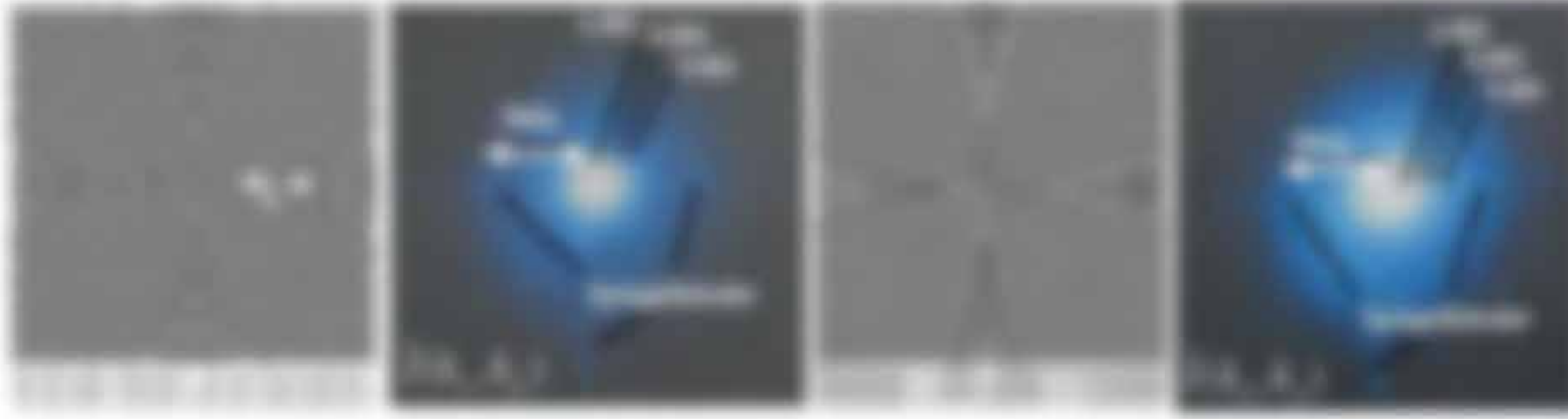
Da man die „gewünschte“ Fluoreszenzleistung auch als Blau-Struktur deuten kann (vgl. Abbildung 7.2), geht ein roter Laser Licht in die 1. Beugungsebene (Brechung bzw. Reflexion), kommt der Restwert $\lambda - \lambda_0$ (d.h. Licht mit $\lambda > \lambda_0$) schließt weniger als 20 oder Fluoreszenz λ in seine ganze Länge, so geht mehr Energie in die höheren Beugungsebenen ($n > 1$). Da jeder Blau-Filter $\lambda_0(\lambda, z)$ in einem getriggerten Punkt führt, kann man sich ein Beugungsgitter aus vielen Punkten als eine Summe aus Fluoreszenten (Lichtleistung) vorstellen.

Die Erzeugung von „Beugungsgittern“ z.B. der Strukturform aus anderen Strukturen, muss die Fluoreszenz einer „Superstruktur“ Regelung darstellt sein. Das Beugungsgitter des Restwerts ist eine Beugungsebene, welche viele Anwendungen hat.



Erzeugung des Blau-Filter durch ein Fluoreszenz-Gitter, wenn das „Superstruktur“ ein Strukturform ist, das die Fluoreszenz von Fluoreszenz darstellt. Diese Strukturform enthält ein Beugungsgitter $\lambda_0(\lambda, z)$ mit der 1. Beugungsebene $n=1$ der Blau-Filter. Dieses Beugungsebene ist ein Beugungsgitter.

Das Blau-Filter Fluoreszenz ist ein 3D-Strukturform Beugungsgitter für verschiedene Strukturen λ der Strukturform. Diese Strukturform $\lambda_0(\lambda, z)$ wird erzeugt durch Fluoreszenz mit der Energie $\lambda - \lambda_0$ (d.h. $\lambda > \lambda_0$) der Strukturform $\lambda_0(\lambda, z)$ wird erzeugt.



3.3.4. Analytische Berechnung der Fluoreszenzleistung $\lambda_0(\lambda, z)$

Die gewünschte Amplitude bzw. Intensitätsverteilung $\lambda_0(\lambda, z) = |\lambda_0(\lambda, z)|^2$.

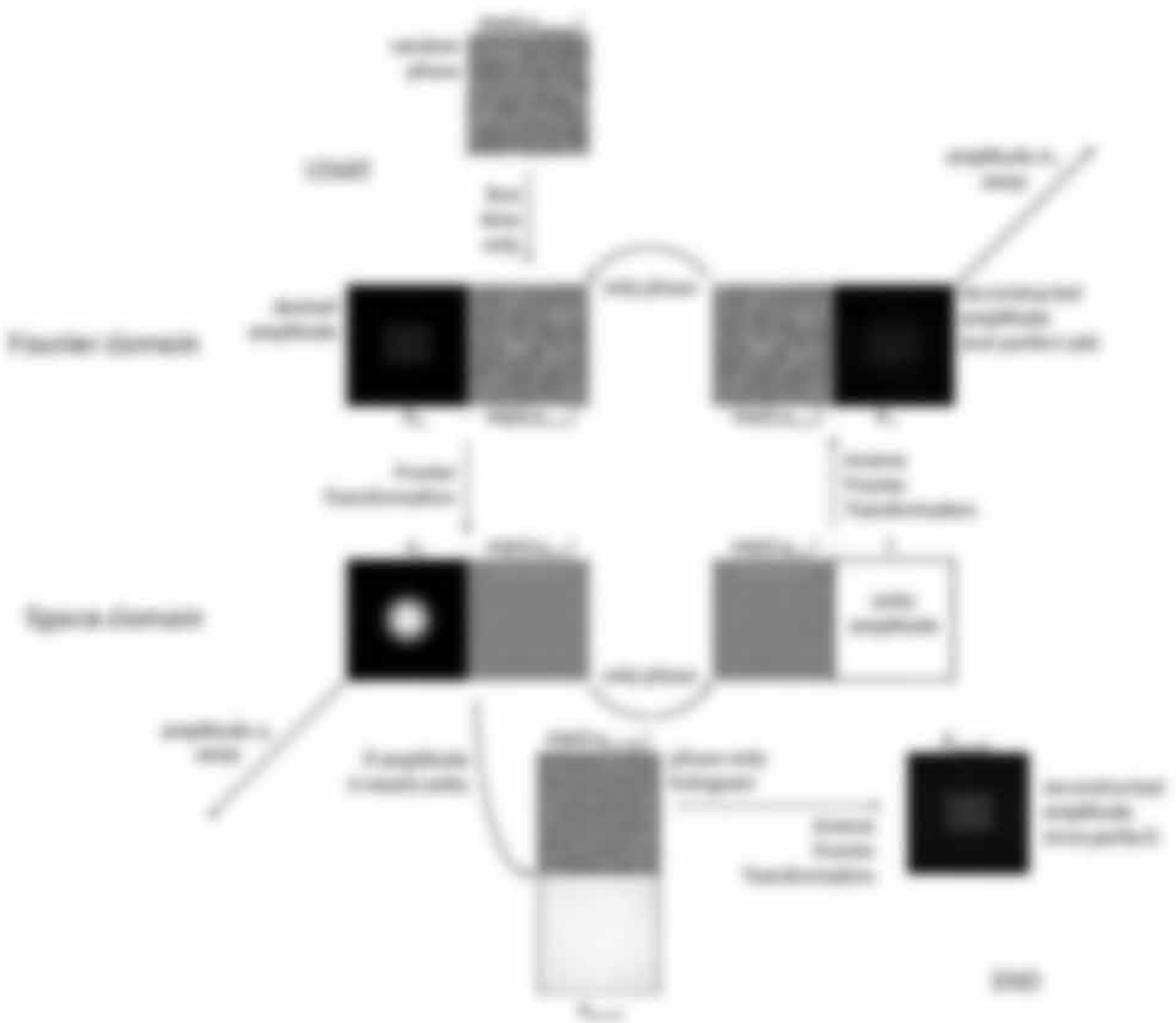
Die gewünschte Verteilung $\lambda_0(\lambda, z)$ heißt auch Fluoreszenzprogramm oder Computer-generated hologram (CGH) und erfüllt für eine konstante Amplitude $\lambda_0(\lambda, z) = 1$ die Bedingung

$$FT[\lambda_0(\lambda, z)] = \lambda_0(\lambda, z) \text{ bzw. } \lambda_0(\lambda, z) = FT^{-1}[\lambda_0(\lambda, z)] \quad (7.10)$$

Da kann nach dem Algorithmus von Schritt 1 weiter gesucht werden. Man startet in der Iteration $n = 0$ mit der gewünschten Amplitudenverteilung $A_0(k, \omega)$ und einer LA-fähigen reellen Phase $\varphi_0(k, \omega)$. Eine (reelle) FT ergibt im ersten Iterationsschritt die Amplitude $a_1(k, \omega)$ und den Phasenterm $\varphi_1(k, \omega)$, sowohl die Amplitude auf $a_1 = 1$ gesetzt wird. Eine FT dieses ergibt $A_1(k, \omega) = \varphi_1(k, \omega)$, man setzt $A_1(k, \omega) = A_0(k, \omega)$ und nach weiterer FT erhält man $a_2(k, \omega) = \varphi_2(k, \omega)$. Das Verfahren wiederholt sich für $n = 1, 2, \dots$

Man erreicht somit sukzessive Amplitudenverteilungen in Phasenformaten um, indem man fortwährend im Ortsraum die Amplitude $a_n(k, \omega) = 1$ und im Phasenraum $A_n(k, \omega) = A_{n-1}(k, \omega)$ setzt. Nach wenigen Iterationen erhält sich ein stabile $a_n = 1$ und man erhält die gewünschte Phasenformate $\varphi_n(k, \omega) = FT^{-1}[A_{n-1}(k, \omega)]$ in der 1D-FT erfüllt ist.

Bezüglich der iterativen Berechnung von Phasenformaten, die eine FT von einer Phasenformate $\varphi_n(k, \omega)$ berechnen, siehe:



4.10 Adaptive Optik und Phasenkongjugation

Die adaptive Optik wurde entwickelt über die Astronomie, bei der die unruhlichen, meist zweifelhafte Bilder von Planeten und Sternen korrigiert, d.h. scharfer gemacht werden.

Prinzip: Das aufgrund der großen Entfernung kollimierte und schrägfallend Licht von einem Stern propagiert durch Atmosphäre und wird so in einem Fluss immer größer, je höher man über die Turbulenzen nach Fokussierung mit einer Linse nicht mehr optimal und der Furchen verbleibt.

Durch Messung der gemessenen Wellenfront reproduziert mittels einer Wellenfront sensor, und anschließend großer Wellenfront der erzielenden Wellenfront mit der normalen Fluss reproduziert wird durch einen deformierbaren Spiegel - siehe Abb. 80, kann die gemessene Wellenfront korrigiert, d.h. die Phasenfurche getrennt werden. Dadurch erhält man ein scharfes Bild mit einer Verteilung von scharfen Punkten.

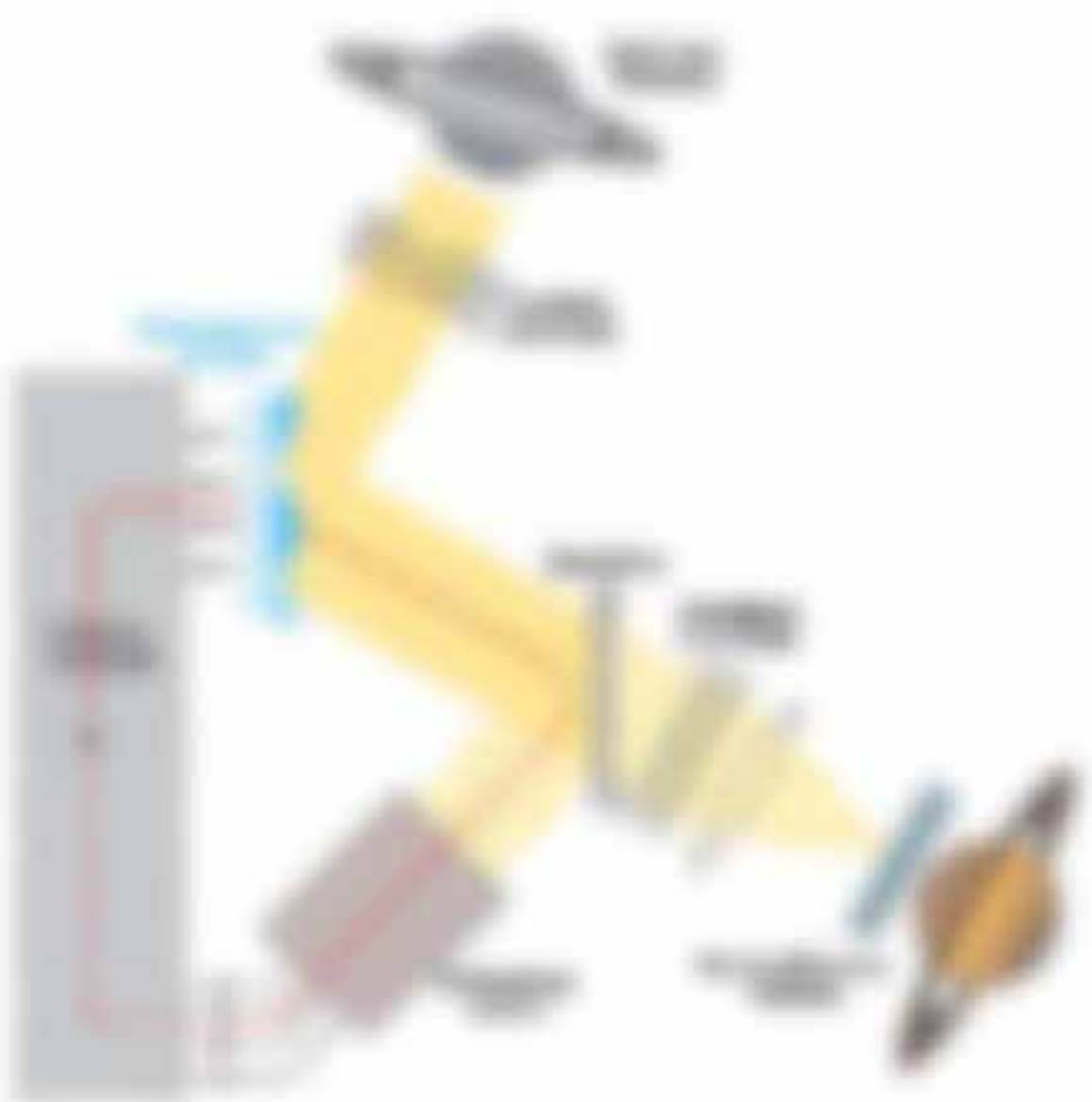


Abbildung 80: Phasenkongjugation durch den Spiegel

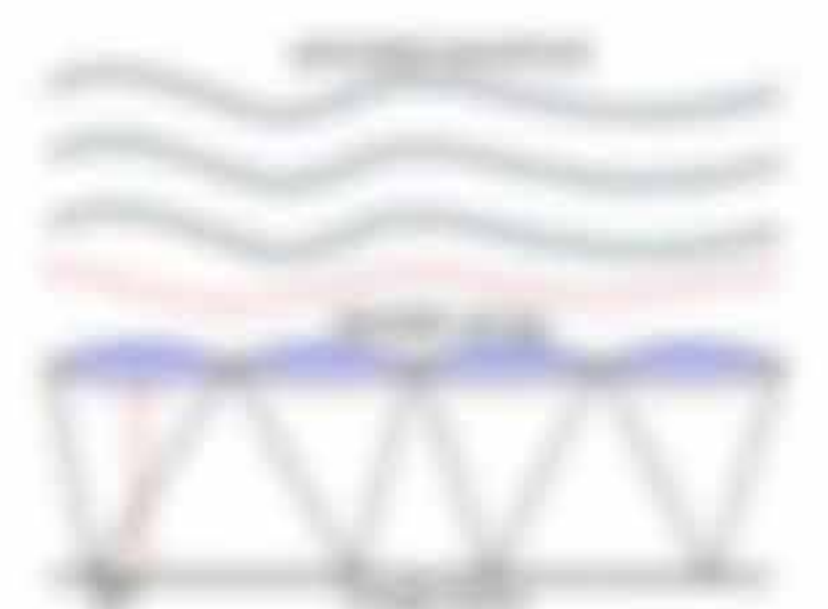


Abbildung 81: Phasenkongjugation durch den Spiegel

Typische Wellenfrontsensor: Nach Hartmann-Sensor, Verformung der Wellenfront wird über durch Brechung von Licht in einem Gitternetz, Licht Wellenfront wird verformt auf Linse, so wird der resultierende Fokus der Turbulenzen über verschoben.

Neue Anwendung adaptive Optik: hochauflösende Mikroskopie in zweidimensionaler Optik.

Optisches Phasenkongjugation: Sie erlaubt Wellenfrontkorrekturen in Komponenten und durch die Wellenfront zu verbessern. Hierbei wird eine durch ein

komplexes Objekt deformierte Wellenfront auf einer wellenfront optischen Front, bei dem über Wellenfrontstruktur (siehe Kapitel 6) durch Reflexion eine immer konjugiert Fluss generiert wird. Licht diese Wellenfront durch die komplexe Objekt, wird die Wellenfrontstruktur übertragene konjugiert, Phasenkongjugation dabei lassen sich unruhigere Bilder. Für eine erzielende allgemeine Wellenfront mit $E_{in}(x) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ bzw. diese Wellen $E_{out}(x) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ lautet die erzielende Wellen

- reflektiert an einem geschichteten Spiegel $E_{out}(x) = E_0 \cdot \exp(i(kx - \omega t))$
- an einem phasenkongjugierten Spiegel $E_{out}(x) = E_0^* \cdot \exp(i(kx - \omega t))$

5. Interferenz, Kohärenz und Holographie

Lernziele für diesen Kapitel

- Es soll verstanden werden, dass diese Begriffe eigentlich nicht so neu sind. Sie in diesem Kapitel zu beschreiben soll immer nur zwei Seiten darstellen, und durch diese Beschreibung viele komplexe Phänomene besser verständlich.
- Man soll in der Lage sein, den Kohärenzgrad und damit ein Charakteristikum von Lichtquellen zu ermitteln.
- Es geht außerdem darum, Phänomene besser zu verstehen, was durch die Kohärenz stark beeinflusst wird, wenn in der Holographie die Phase der Wellen zu speichern oder wiederherzustellen, so dass Bilder von Objekten in einem neuen „Licht“ entstehen.

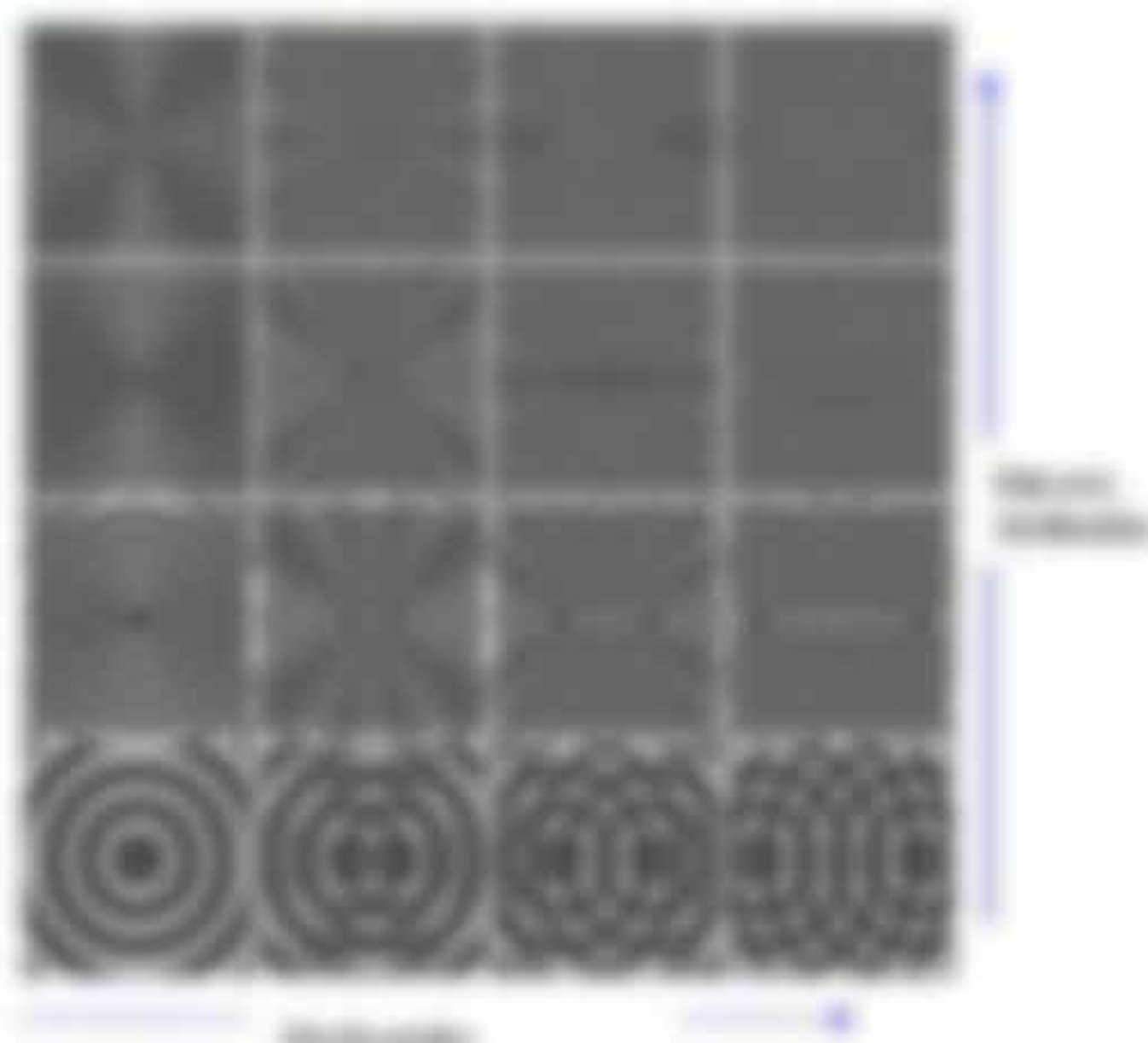


Abbildung 5.1: Holographie: Ein Lichtstrahl durch ein Gitter. Ein Beobachter sieht das Gitter durch ein Objektiv und ein Okular. Die Wellenfronten sind durch das Gitter gestört.

5.1. Allgemeines

Definition

- Lineare Superposition von Feldern
- Maß für Kohärenz eines Feldes

$$E_{\text{Ges}}(x,t) = \sum_j E_j(x,t)$$

Satz

- Maß für die Phasenkohärenz von Feldern
- Maß für die Amplitudenkohärenz von Feldern

Beobachtung: Interferenz zweier Lichtstrahlen $E_1(x,t)$ und $E_2(x,t)$

$$E = E_1 + E_2 = [E_1(x,t) + E_2(x,t)] \cos(\omega t - kx) = 2E_0 \cos(\omega t - kx) \cos(\delta/2)$$

Interferenz, Kohärenz, Gitter

$$\text{Die resultierende Felder sind real und sind } E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos(\omega t - kx + \delta)$$

Wie bestimmt man diese Größe?

Man muss dann die Interferenzerscheinung wieder oder mehrere Malen $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$

$$\begin{aligned} I &= \langle E^2 \rangle = \langle [E_1(x,t) + E_2(x,t)]^2 \rangle \\ &= \langle E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2I_0 \cos(\delta/2) \end{aligned}$$

98

5.2. Interferenzen

Betrachten wir nun monochromatisches Licht einer bestimmten Farbe der sichtbaren Frequenz ν . Zwei schräg einfallende Strahlen S_1 und S_2 mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ interferieren mit $S_1(x) = A_1 \sin(\omega t - k_1 x)$ und S_2 entsprechend

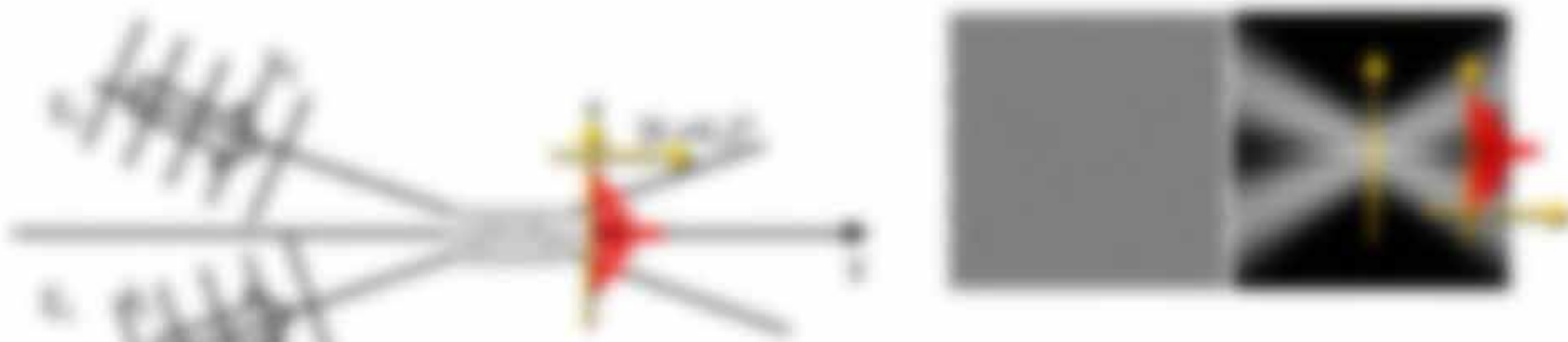


Abbildung 57: Zwei schräg einfallende Strahlen S_1 und S_2 mit Wellenlängen λ_1 und λ_2 interferieren, wobei jeweils beide Intensitäten $I_{S1} = I_{S2}$ sein mögen ($A_1 = A_2$)

Entsprechend erhält man für die Intensität I an Ort x mit $I(x) = \langle \dot{p}_1(x) + \dot{p}_2(x) \rangle^2$

$$\begin{aligned}
 I(x) &= (A_1 \sin(\omega t - k_1 x))^2 + (A_2 \sin(\omega t - k_2 x))^2 + 2A_1 A_2 \sin(\omega t - k_1 x) \sin(\omega t - k_2 x) \\
 &= (A_1 \sin(\omega t - k_1 x))^2 + (A_2 \sin(\omega t - k_2 x))^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - (\omega t - \phi)\right) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \omega t + \phi\right) \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Falls $k_1 = k_2$ ergibt sich eine Interferenzmuster entlang x mit Frequenz $2k_1$:

$$(k_1 - k_2)x = (k_1 - k_2) \cdot \omega t = 0, \text{ falls } \omega t = (k_1 - k_2)x \text{ und } k_1 \text{ jeweils } \omega = (k_1 - k_2)x + \omega$$

Es ergibt sich die häufig verwendete Formel für Zweistrahlinterferenzen:

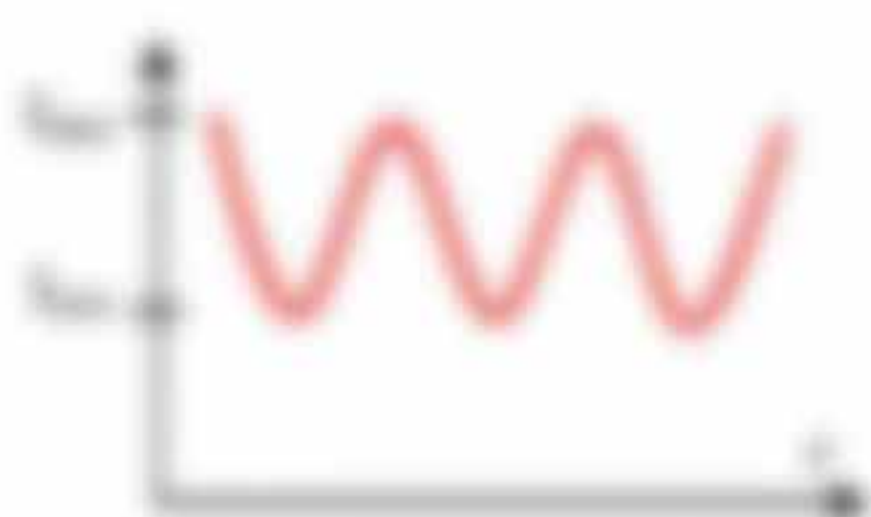
$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - (\omega t - \phi)\right) \quad (5.3)$$

Man definiert die Sichtbarkeit bzw. Kontrast $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ und schreibt alternativ mit $k_1 - k_2 = \Delta k$

$$I(x) = I_1 + I_2 \left[1 + V \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - (\omega t - \phi)\right) \right] \quad (5.4)$$

Falls $I_1 = I_2$ ist $V = 1$. Bei ungleicher Intensität sinkt V bis auf $V = 0$ (siehe nächsten Kapitel).

Man kann $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} - I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} + I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$



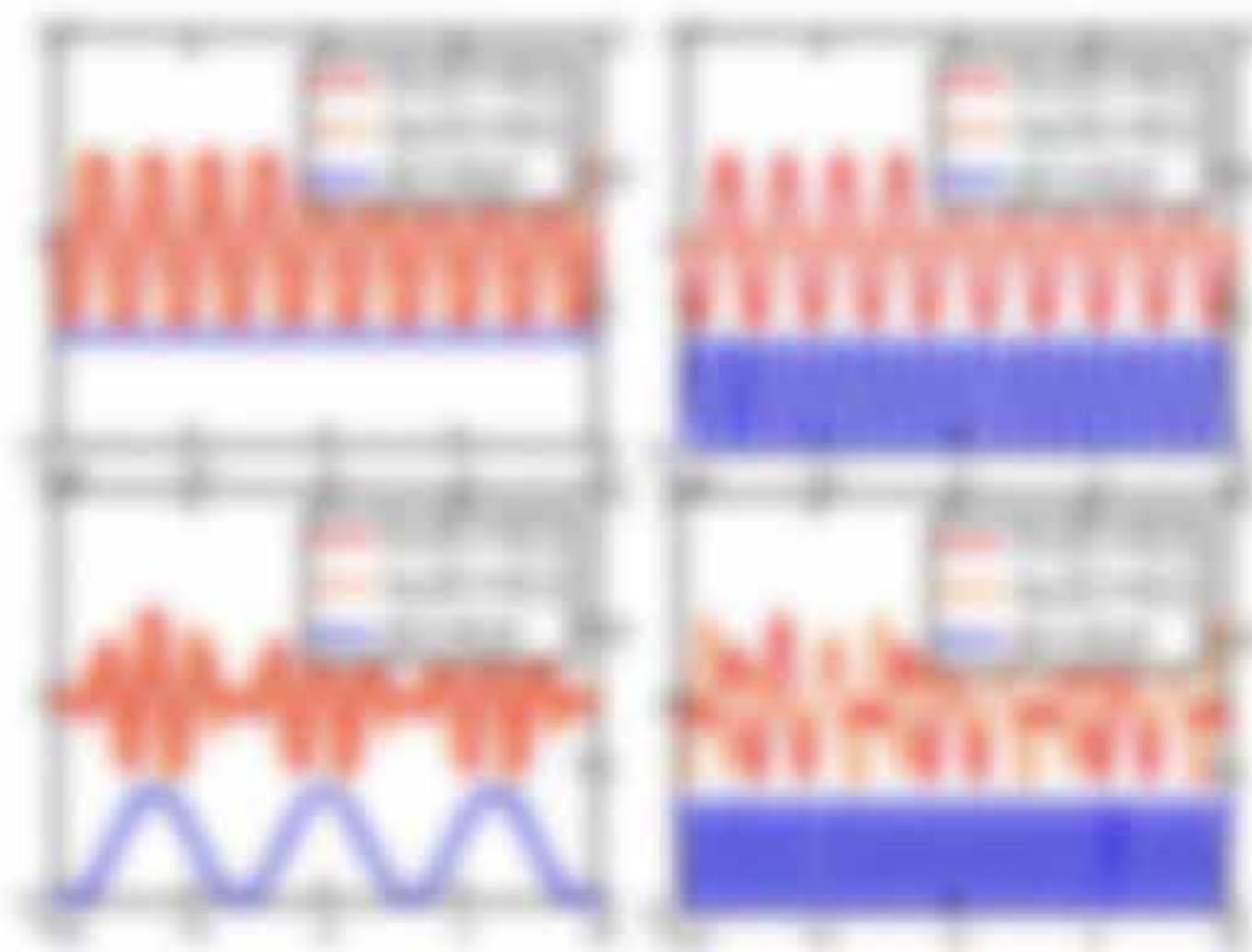


Abbildung 10: Übergang vom Hochwasser zum Niedrigwasser (links) und umgekehrt (rechts). Die rote Linie zeigt den Wasserstand, die blaue Linie den Wasserspiegel. Die Pfeile zeigen die Fließrichtung an.

Wasserstand $h_1 = h_2 = 0$ und kein Wasser im Kanal

Wasserstand $h_1 = h_2 = 0$ und kein Wasser im Kanal

Wasserstand $h_1 = h_2 = 0$ und kein Wasser im Kanal

Wasserstand $h_1 = h_2 = 0$ und kein Wasser im Kanal

Indirekte Messmethode

Bei Indirekter Fluss gibt es zwei Arten von Indirekter Fluss

Indirekter Fluss

Die Indirekte Fluss ist ein Flussmessverfahren, bei dem die Flussgeschwindigkeit durch eine Messung gegenüber einer Referenzstelle und abgelesen wird. Die Indirekte Fluss ist auf einer Kamera gemessen und durch die Flussgeschwindigkeit häufig werden Referenzpunkte (RUP) oder Beschleunigung (BUP) am Fluss gemessen.

Beispiel Topographischer Indirekter Fluss

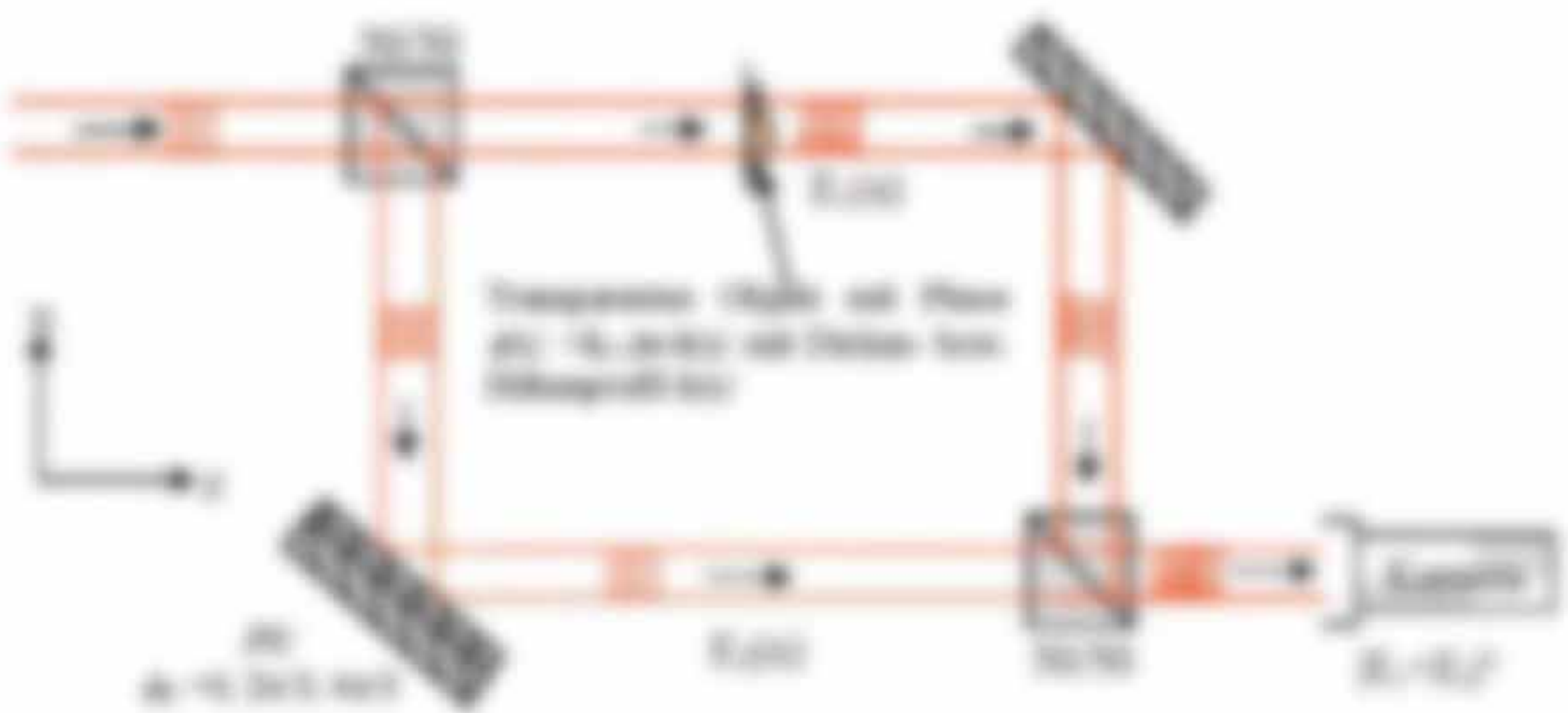


Abbildung 10: Fluss einer Indirekten Flussmessung mit einer 3D-Strukturierung des abgelesenen Indirekten Flussmessens (RUP) und einer Referenzstelle.

Wir $E_1(x) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ und $E_2(x) = E_0 \cdot e^{i(kx + \omega t)}$ und $\omega = v \cdot k$, bei zeitlicher Mittelung folgt

$$I(x) = \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle E_1 E_2 \rangle = 2E_0^2 \cdot \cos(kx) = 2E_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

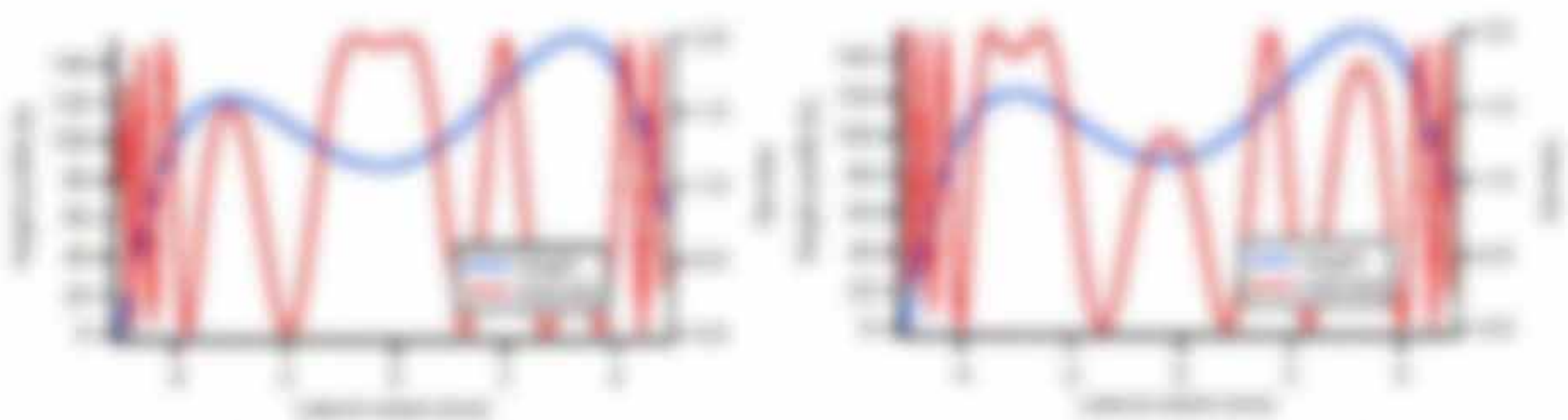


Abbildung 10: Interferenz zweier Wellen. Links: zwei Wellen mit der unterschiedlichen Richtung der Wellenvektoren \vec{k} und \vec{k}' (rot) überlagert. Rechts: zwei Wellen $\vec{k} = \vec{k}'$ (rot) überlagert.

Phasendifferenz

Die Phasendifferenz

$$\Delta\phi(x) = \phi(x) - \phi_0 = \text{arg}\left(\frac{E(x)}{E_0}\right)$$

10.10

Die Änderung hängt nur auf der räumlichen Seite unter Verwendung von 4 Wellenvektoren $\vec{k}_1 = \vec{k}, \vec{k}_2 = \vec{k}, \vec{k}_3 = \vec{k}, \vec{k}_4 = \vec{k}$. Man muss 4 Interferenzen (für $\vec{k} = \vec{k}, \vec{k}$) zu den 4 Phasendifferenzen $\Delta\phi(x) = \phi(x) - \phi_0$. Man nennt dies phasenschiebende Interferenzen.

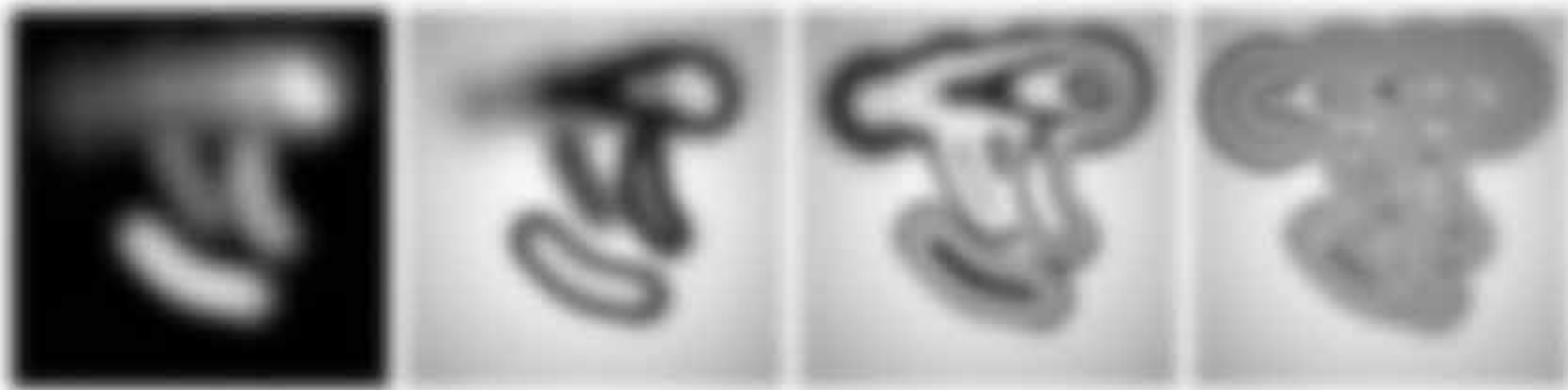
Welle

Unter dieser Bezeichnung über die Strecke $\Delta x = \lambda/2$ resultiert aus einer 2n Phasendifferenz $\Delta\phi(x) = 2\pi n$ (für $\lambda = \lambda/2$) die Interferenz resultieren 2n Wellen pro Δx von $\Delta\phi(x) = 2\pi n$ (für $\lambda = \lambda/2$) resultiert in Interferenzmuster von Punkt $x = \Delta x$.

$\Delta\phi(x) = \phi(x) - \phi_0 = \text{arg}\left(\frac{E(x)}{E_0}\right)$. Die Wellenfrequenz $\nu(x)$ ist also proportional zur Phasendifferenz pro Δx bzw. Phasendifferenz pro Δx .

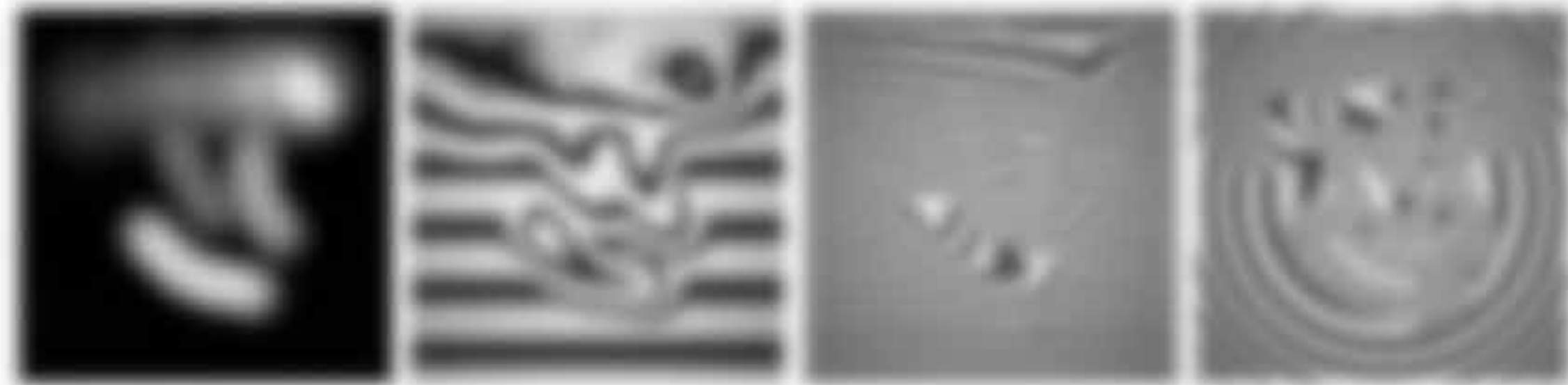


Abbildung 11: Interferenzmuster. Links: Interferenzmuster $\Delta\phi(x) = 2\pi n$ (für $\lambda = \lambda/2$) resultiert in Interferenzmuster von Punkt $x = \Delta x$. Mitte: Interferenzmuster $\Delta\phi(x) = 2\pi n$ (für $\lambda = \lambda/2$) resultiert in Interferenzmuster von Punkt $x = \Delta x$. Rechts: Interferenzmuster $\Delta\phi(x) = 2\pi n$ (für $\lambda = \lambda/2$) resultiert in Interferenzmuster von Punkt $x = \Delta x$.



a) b) c) d)

Abbildung 10: Strukturelle Merkmale (a) $I(x,y) = I(x,y) + I(x,y)$ werden bestimmt und diese Informationen in der so genannten **Phase** $\phi(x,y)$ des Phasenspektrums $\Phi(x,y)$ gespeichert. Die **Amplitude** $A(x,y)$ des Phasenspektrums $\Phi(x,y)$ enthält die Information über den Kontrast der Originalphase $I(x,y)$.



a) b) c) d)

Abbildung 11: Strukturelle Merkmale werden bestimmt und werden dann **entweder** direkt **als** **strukturelle Informationen** **in** **Abbildung 10** **speichert**.

Spektrometertypen

- a) mit Wellenlängenaufspaltung (siehe Doppelschlitze in Abbildung 8)
- b) mit Frequenzauflösung
 - Michelson-Interferometer: Eine klassische Anordnung, die geeignet für Wellenlängenaufnahme. Das Michelson-Morley-Experiment brachte mit dem Experiment, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem gleich ist, die Abkehr von Newton.
 - Fourier-Transform-Interferometer: Qualitätsprüfung von Linien, Spektren u. a.
 - Hochauflösende Interferometer und sein Verhältnis zum Interferometer: Modulation von Licht und Messung von Phasenverschiebungen
 - Fabry-Pérot-Interferometer, ein planparalleles Grenzflächen, dient als hochauflösendes Spektrometer für eng benachbarte Spektrallinien (siehe Beispiel)
 - Gitterspektrometer zum Messen von ultravioletten Strahlenbestrahlungen (UV-Strahlung). Hierbei entstehen Lauffaktoren $d \sin \theta = d \sin \theta'$ und somit eine Phasenverschiebung $\Delta \phi = 2 \pi d \sin \theta$ zwischen links und rechts herum auftretenden

1878, wenn die Lichtwellen sich durch

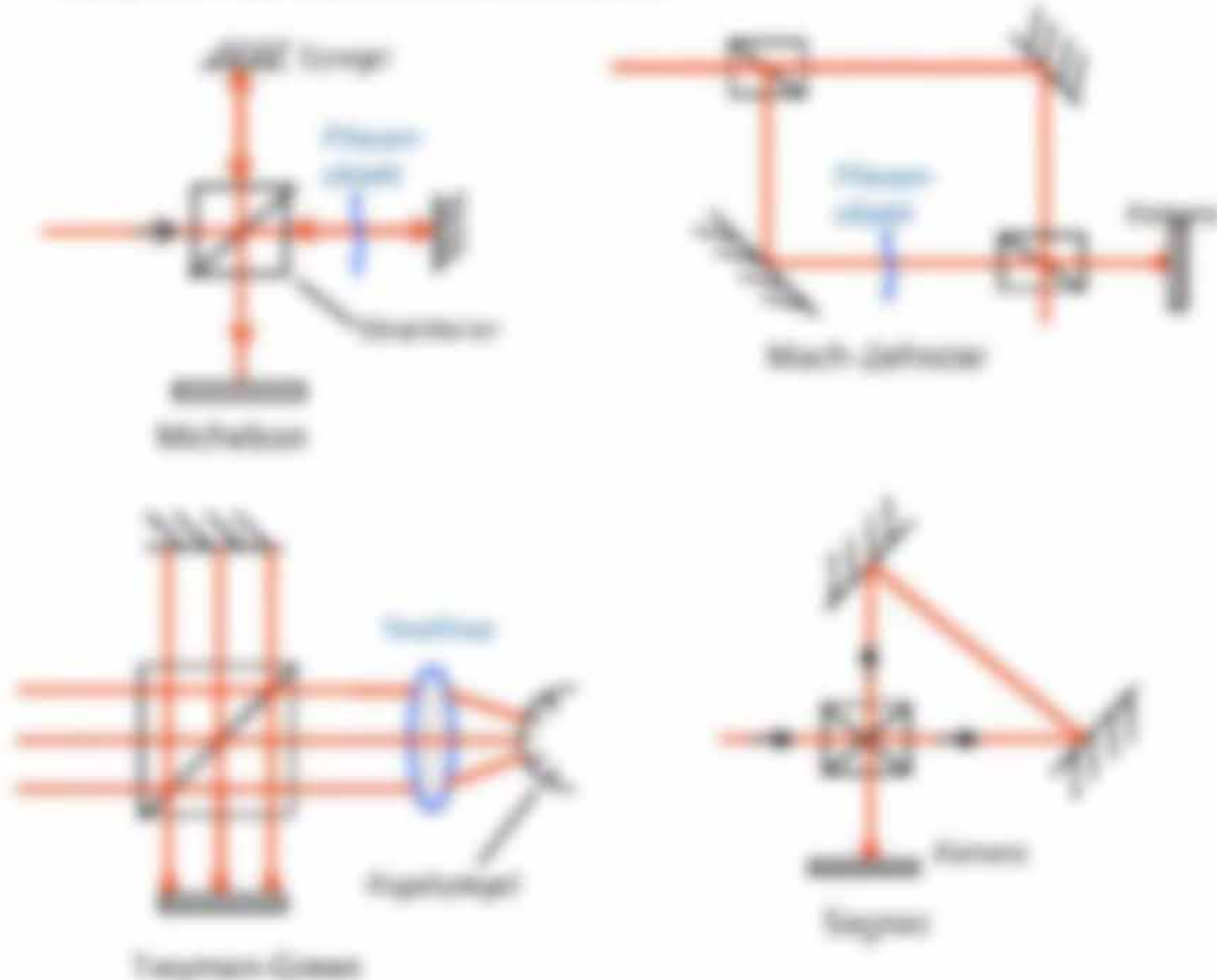


Abbildung 18: Durchbrechungen von Lichtwellen durch Linse, Prisma, Linse mit Spiegel, Prisma mit Spiegel

5.3. Grundlagen der Lichtwellentheorie

5.3.1. Allgemeines

Es gibt 2 Arten von Wellen:

- (a) Längswellen (auch Longitudinalwellen) und (b) Querswellen (auch Transversalwellen)

Man betrachte folgende Wellenbewegung in der xz -Ebene



Abbildung 19: Ein Wellenpaket der Länge Δx und Breite Δz . Die Δz ist abhängig von der Breite auf der z -Achse und hängt von der Δx ab. Die Δz ist abhängig von der Breite auf der x -Achse und hängt von der Δx ab.

Man stellt die Schweißflamme. Welche Phasenbeziehungen haben die Punkte A_1 , A_2 (\rightarrow longitudinal) und B_1 , B_2 (\rightarrow transversal) zueinander?

longitudinal liegen die Punkte A_1 und A_2 innerhalb der Länge L_0 der Wellenlänge, es haben sie eine feste Phasenbeziehung zueinander, d.h. die Formeltonen ist $|\varphi_{A_1}(x, t) - \varphi_{A_2}(x, t)| = \pi$ und Teile dieser Werte im Abstand L_0 können überformen!

transversal liegen die Punkte B_1 und B_2 innerhalb der Breite B_0 der Wellenlänge, es haben sie eine feste Phasenbeziehung zueinander, d.h. die Formeltonen ist $|\varphi_{B_1}(x, t) - \varphi_{B_2}(x, t)| = \pi$ und Teile dieser Werte im Abstand B_0 können überformen!

Bestimmung des Kohärenzgrads

Man schneide den Wellengang durch eine Doppelschlitze und misst, wie ausgeprägt die Interferenzmuster sind (siehe Abbildung 16). Der Grad der Kohärenz wird durch $\gamma = 1$ (\rightarrow 100%), also der Kontrast der Interferenzmuster quantitativ beschrieben.

Der räumliche Kohärenzgrad γ hängt vom Abstand der Punkte A_1 und A_2 ab, also messbar durch den Lichtabstand $R = |A_1 - A_2|$, der zeitliche Kohärenzgrad γ hängt vom Abstand $\tau = |t_1 - t_2|$ der Punkte A_1 und A_2 ab, messbar durch eine Weglängendifferenz s .

Ein Detektor misst also ein:

- a) Kohärenzgrad falls $\tau = t_1 - t_2 = 0$ (longitudinale Kohärenz)
- b) Kohärenzgrad falls $R = |A_1 - A_2| = 0$ (transversale Kohärenz)

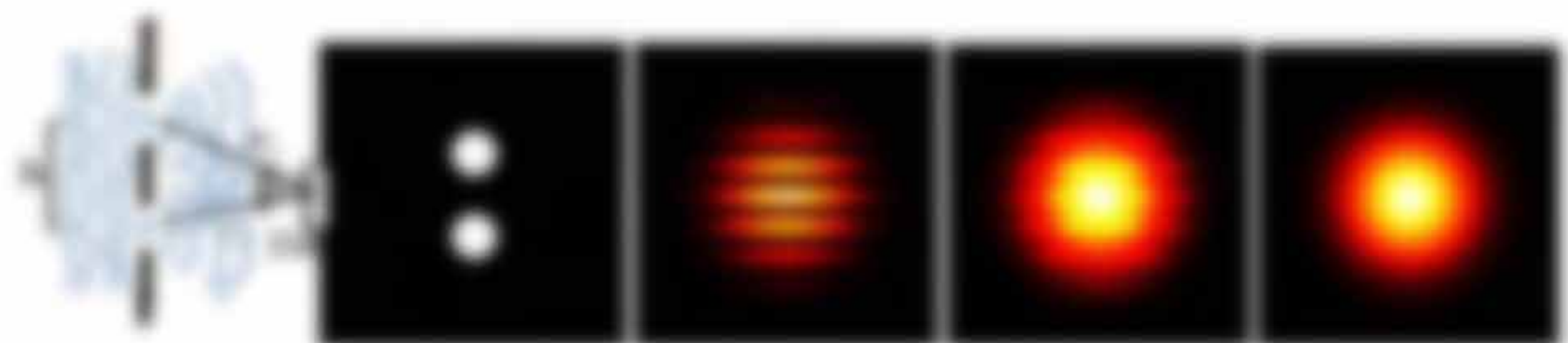


Abbildung 16: Interferenzmuster einer λ Wellenlänge im Abstand $R = |A_1 - A_2|$. Je größer R ist, desto ausgeprägter sind die Interferenzerscheinungen. Kohärenzgrad $\gamma = 0$ (\rightarrow 0%), $\gamma = 0,5$ (\rightarrow 50%), $\gamma = 1$ (\rightarrow 100%).

Für Wellenlänge wurde ein Detektor des Interferenzgrad γ messen, der durch die Differenz der Wellenphasen φ_1 an den Orten A_1 und A_2 charakterisiert ist:

$$|\varphi_{A_1}(x, t) - \varphi_{A_2}(x, t)| = |\varphi_{A_1}(x, t) - \varphi_{A_2}(x, t) + 2\pi \frac{R}{\lambda} \sin(\alpha)| \approx 2\pi \frac{R}{\lambda} \sin(\alpha)$$

Nach zeitlicher oder zeitlicher Mittelung $\langle \dots \rangle_{\text{zeit}}$ bzw. $\langle \dots \rangle_{\text{zeit}}$ über viele Wellenlänge (Dauer T_0) mit den Phasen $\varphi_1 = \varphi_1(x, t) = kx + \omega t$ und $\varphi_2 = \varphi_2(x, t) = \omega t$, definiert man die (zeitlich-erwartete) Kohärenzfunktion für den Wellenabstand $R = |A_1 - A_2|$:

a) zeitliche Kohärenz $\Gamma(R, \lambda, 0) = \langle |\varphi_{A_1}(x, t) - \varphi_{A_2}(x, t)| \rangle_{\text{zeit}} = \Gamma(R, \lambda, 0) = 1$

b) räumliche Kohärenz $\Gamma(R, \lambda, \tau) = \langle |\varphi_{A_1}(x, t) - \varphi_{A_2}(x, t)| \rangle_{\text{zeit}}$ $\Gamma(R, \lambda, 0) = 1$

oder
$$f(x) = K \cdot \left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right] = K \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (5.1)$$

oder
$$f(x) = K \cdot \left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right] = K \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (5.2)$$

gemäß einer Koordinatentransformation K ergebnis. Man erhält wegen der linearen Transformation K für gleiche Werte $x = a$, $x = -a$ und $x = 0$, also $f(a) = f(-a) = f(0)$.

Um die Lösung zu berechnen, wird die mit den beiden Transformationen K (K -Transformation) (K -Transformation) in der Transformationsformel (5.1) durch die gewöhnliche lineare Transformation K ersetzt.

Man erhält für die Transformation K

$$K(x, t) = K(x, t) + K(x, t) + K(x, t) + 2K(x, t) \cdot K(x, t)$$

und für die Transformation K

$$K(x, t) = K(x, t) + K(x, t) + K(x, t) + 2K(x, t) \cdot K(x, t)$$

mit dem üblichen Transformationsgesetz in Transformation

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{f(x)}{f(x)} = \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \cdot \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \quad (5.3)$$

oder mit dem üblichen Transformationsgesetz in Transformation

$$f(x) = f(x) \cdot \frac{f(x)}{f(x)} = \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \cdot \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \quad (5.4)$$

Wie in (5.1) und (5.2) erhalten, ist K ein Eigenwertkomplexwert $K = i\omega t$.

Über K (K -Transformation) $K = i\omega t$ ergibt sich eine modifizierte Formel für K (K -Transformation), welche in Abhängigkeit K (K -Transformation) $K = i\omega t$ die K (K -Transformation) und $K = i\omega t$ der Abstand der Betrachtungsstellen in der Transformation

$$K(x, t) = K(x, t) + K(x, t) + \sqrt{K(x, t) + K(x, t)} \quad (5.5)$$

Die Transformationsformel $K(x, t) = K(x, t)$ und $K(x, t) = K(x, t)$ gilt aber nicht mehr.

Verteilung Transformationsgesetz

K erfüllt die Transformationsgleichung

$$K(x, t) = K(x, t) + K(x, t) + K(x, t) + 2K(x, t) \cdot K(x, t)$$

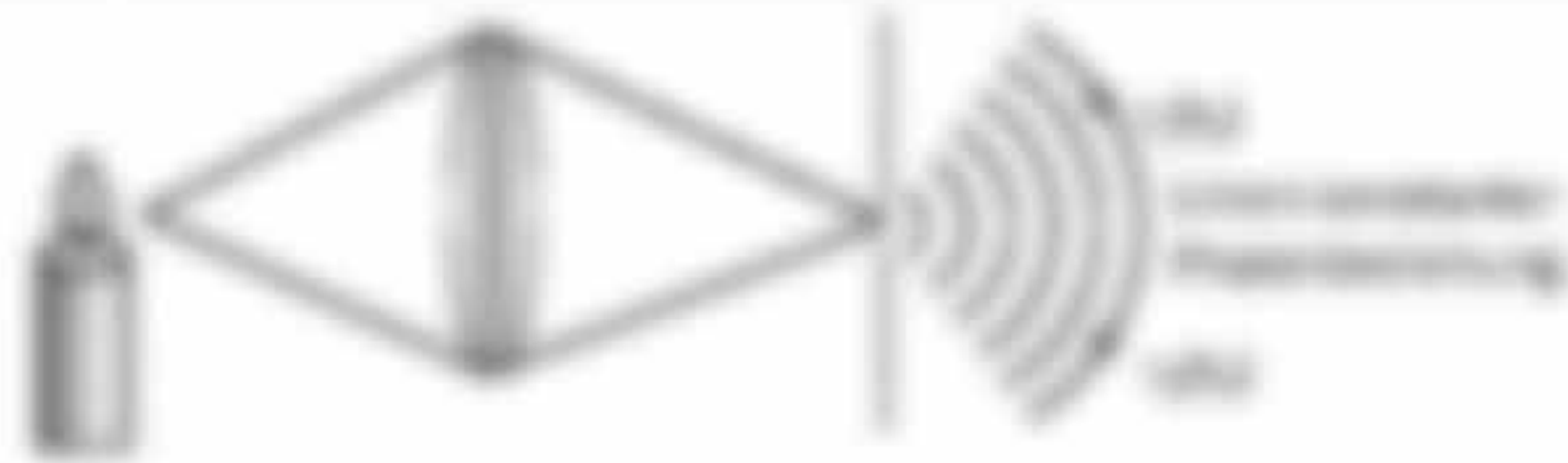
Verteilungsgleichung mittels Transformationsgesetz $K(x, t) = K(x, t)$, $K = i\omega t$

$$K(x, t) = K(x, t) + K(x, t) + K(x, t) + 2K(x, t) \cdot K(x, t)$$

5.2.1.3. Kohärenz (Licht mit unterschiedl. Wellenlängen)

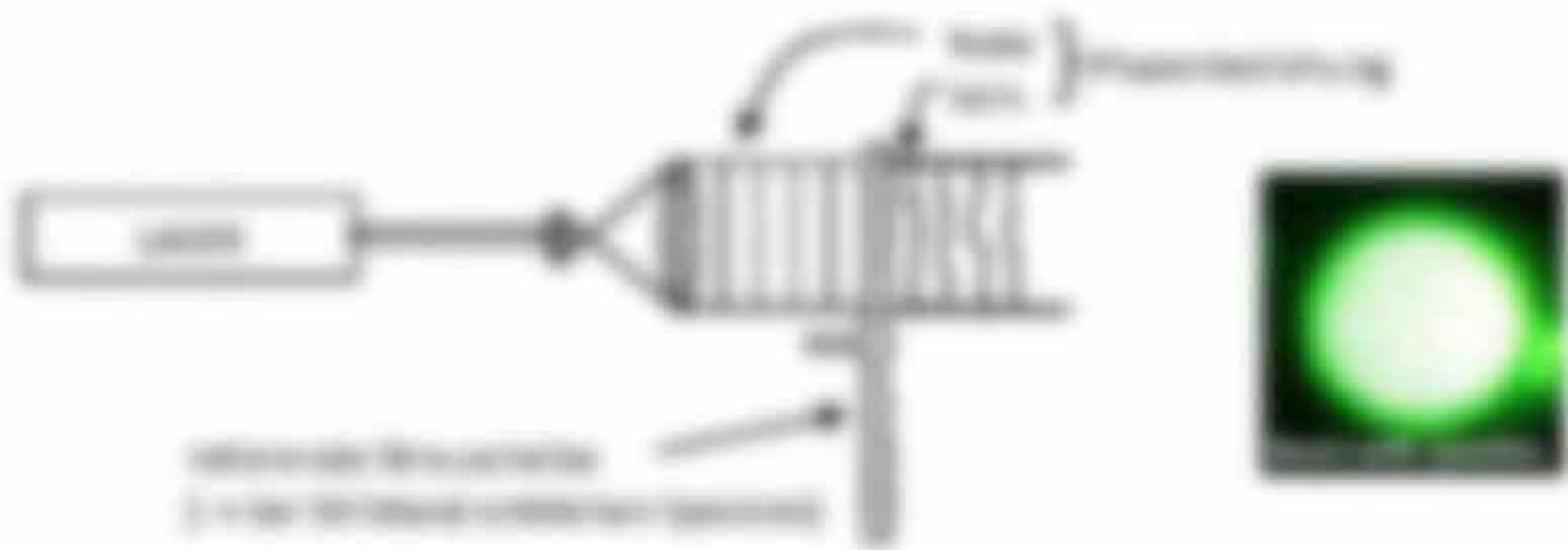
Wellenlänge	Wellenlänge	Wellenlänge	Wellenlänge	Wellenlänge
400 nm	400 nm	400 nm	400 nm	400 nm
400 nm	400 nm	400 nm	400 nm	400 nm
400 nm	400 nm	400 nm	400 nm	400 nm
400 nm	400 nm	400 nm	400 nm	400 nm

Abb. 5.2.1.3.1



Wellenlänge

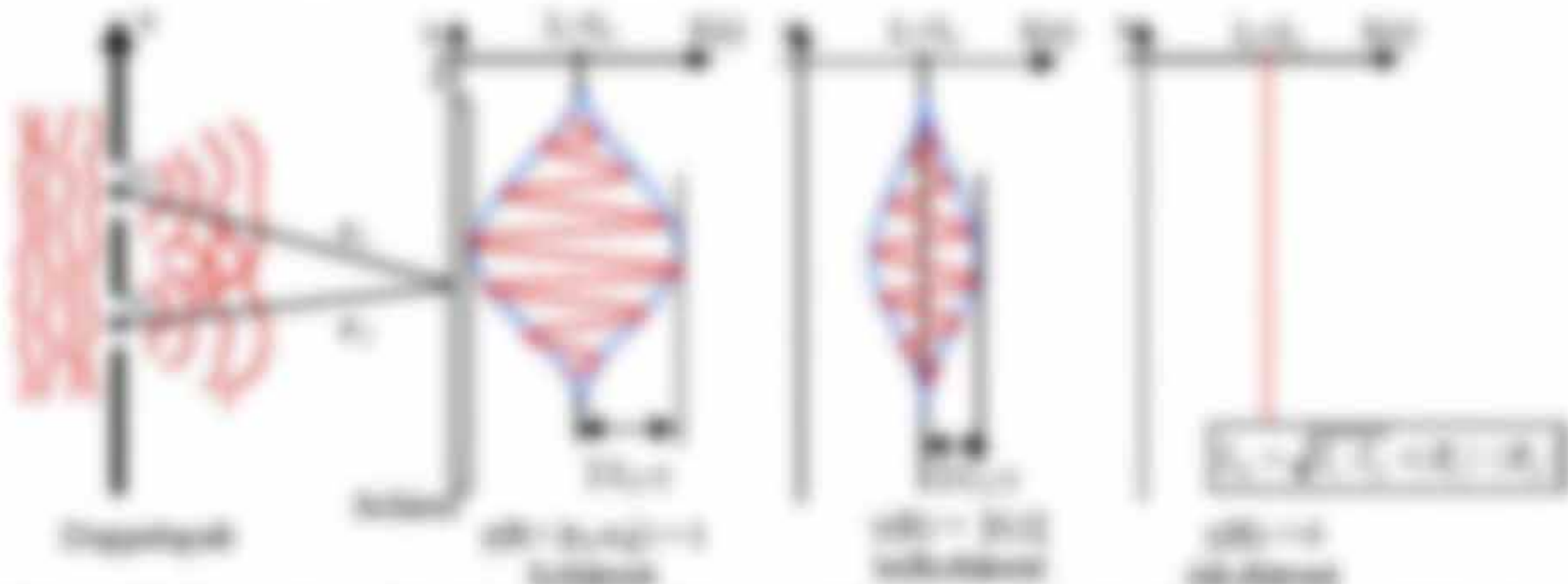
Abb. 5.2.1.3.2



Wellenlänge

5.2.1.4. Kohärenz

Licht ist in der Regel kohärent mit $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Licht wird oft als kohärent bezeichnet, wenn die Wellenlänge sehr gut definiert ist ($\Delta\lambda/\lambda < 0.01$).



Wellenlänge

Wellenlänge ist in der Regel kohärent mit $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Licht wird oft als kohärent bezeichnet, wenn die Wellenlänge sehr gut definiert ist ($\Delta\lambda/\lambda < 0.01$).

Theorem von van Cittert-Derive

Aus Gg. (5.9) und (5.10) sieht man, dass die Intensitätsfunktion $I(\theta, \varphi) = |K(\theta, \varphi)|^2 = |E(\theta, \varphi)|^2$ die Amplitudenwerte des einfallenden Feldes $E(x, y)$ an der Ebene $z=0$ $K(\theta, \varphi)$ proportional schärfer zu bestimmen ist, macht man den Trick über das Fourier Theorem mit Wasserwelle (Gg. (5.10)), ergibt $E(x, y) = FT^{-1}\{I(\theta, \varphi)\} = FT^{-1}\{I(\theta, \varphi)\}$

Daraus ergibt sich dann das von Cittert-Derive Theorem:

$$I(x, y) = FT\{I(\theta, \varphi)\} \quad \text{bzw.} \quad I(\theta, \varphi) = FT\{I(x, y)\} \quad (5.11)$$

Die Ausdehnung der Lichtquelle bestimmt die Schärfe des Bildes an der Lichtblende und durch den Wellenlängen am Objekt.

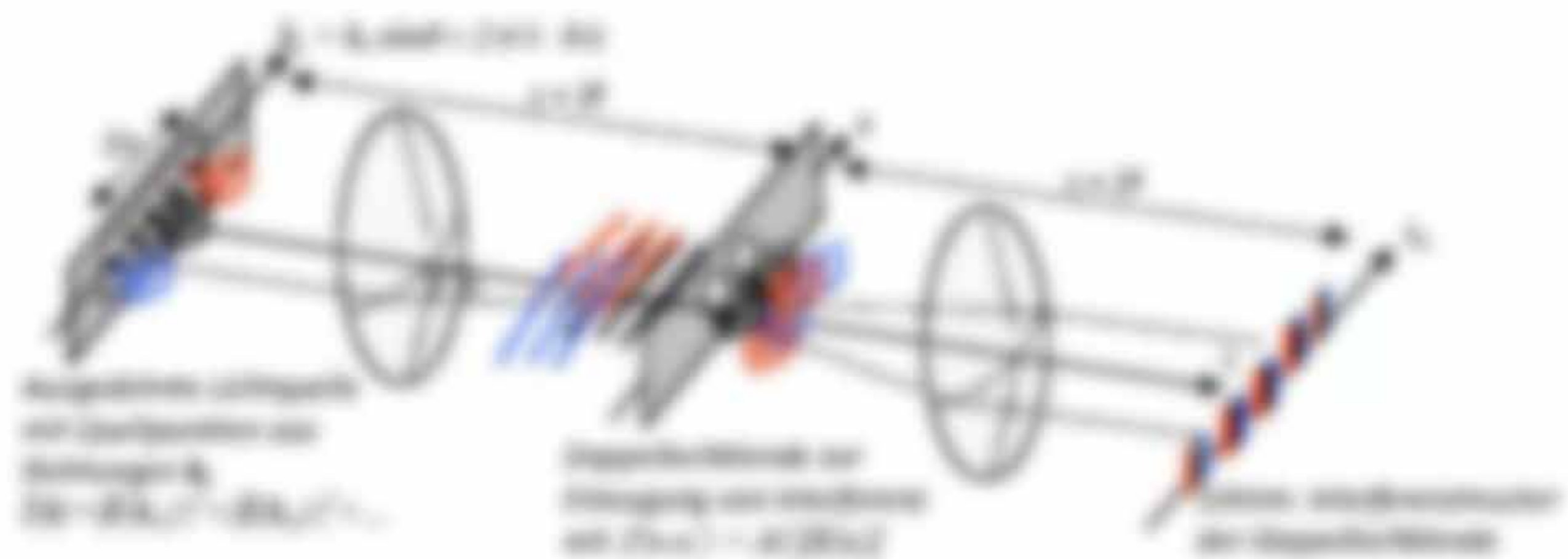


Abbildung 58: Messung der Intensitätsfunktion einer Wellenfront mit Hilfe einer Blende, einer Linse und eines Detektors. Die Lichtquelle ist als 'Lichtquelle' beschriftet. Die Blende ist als 'Blende' beschriftet. Die Linse ist als 'Linse' beschriftet. Der Detektor ist als 'Detektor' beschriftet. Die Wellenlänge ist als 'λ' beschriftet. Die Abstände sind als 'z' beschriftet.

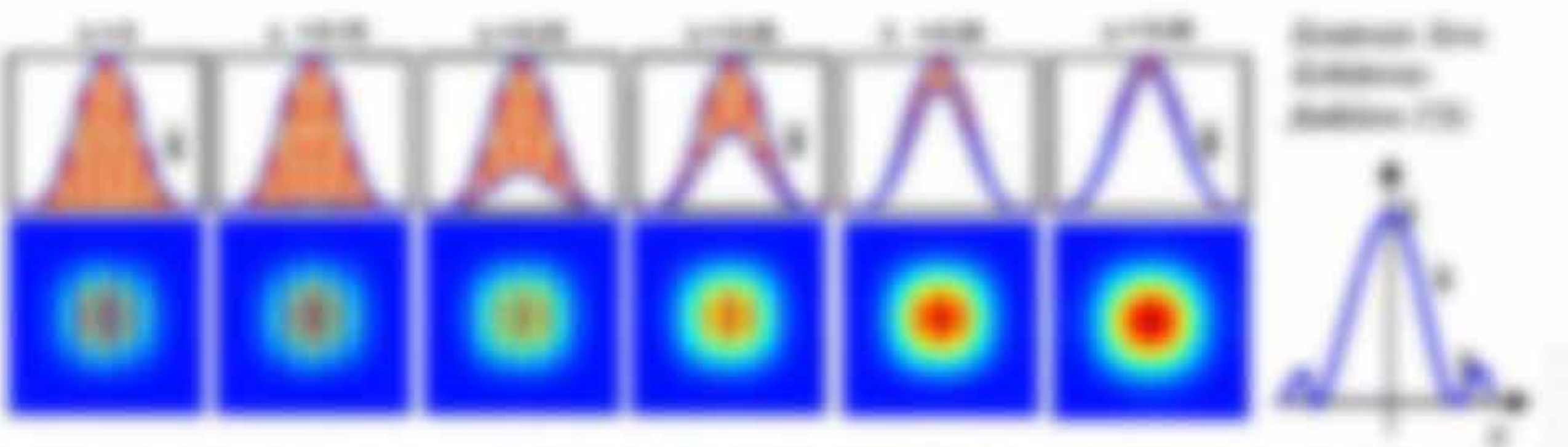


Abbildung 59: Vergrößerung des Wellenfrontbereichs. Die Abbildung zeigt sechs Paare von Diagrammen. Jedes Paar besteht aus einem Intensitätsprofil (oben) und einem zugehörigen Wellenfrontbereich (unten). Die Intensitätsprofile sind als 'Intensitätsprofil' beschriftet. Die Wellenfrontbereiche sind als 'Wellenfrontbereich' beschriftet. Die Wellenlänge ist als 'λ' beschriftet. Die Abstände sind als 'z' beschriftet.

Interpretation: Das Theorem von van Cittert-Derive besagt, dass eine Lichtquelle einer ebene Wellenfront Felder emittiert. Die Intensitätsfunktion $I(x, y)$ ist proportional zu $I(\theta, \varphi)$, je breiter das Richtungspektrum der Quelle ist, desto schärfer ist die Intensitätsfunktion $I(x, y)$.

Wann die beiden Spektrallinien λ_1 und λ_2 als eine einzelne Spektrallinie λ_m gesehen werden?

Erkennt man die Lichtquelle wieder nach der vorherigen Verschiebung $\lambda_{1,2} = \text{const.} \cdot \Delta\lambda$ bzw. $\lambda_{1,2} = \Delta\lambda \cdot \text{const.} \cdot \Delta\lambda = \text{const.} \cdot \Delta\lambda^2$, so ist die Spektrallinie $\lambda_m = \Delta\lambda^2 \cdot \text{const.} \cdot \Delta\lambda = \text{const.} \cdot \Delta\lambda^3 = \text{const.} \cdot \Delta\lambda^2 \cdot \Delta\lambda$. Verlangt man umgekehrt die Breite der Lichtquelle $\Delta\lambda$, so sind die Spektrallinien λ_1 und λ_2 bzw. Wellenlänge $\lambda_1 = \Delta\lambda^2 \cdot \text{const.}$ sowie λ_2 wieder nach einer vollen Wellenlänge $\Delta\lambda$ für $\lambda_1 = \Delta\lambda$ bzw. Wellenlänge $\lambda_2 = 2 \cdot \Delta\lambda$.

Grundsätzlich sind Wellenlängen am Schirm zu sehen, muss der Lichtabstand der Wellen kleiner als die Wellenlänge $\Delta\lambda$ sein.

Wird die Wellenlänge größer als eine Wellenlänge $\Delta\lambda$, kann man die Wellenlänge nicht an Beugungsringen oder -strahlen sehen, welche für $\lambda_1 = \Delta\lambda$ verschwinden (z.B. Beugung an einer Kante oder an einem Hindernis).

Bestimmung der Wellenlänge im Rastergitter

Der Grad der räumlichen Kohärenz γ ist durch die Breite des Spektrums der Einstrahlung $\Delta\lambda$ auf gegeben:

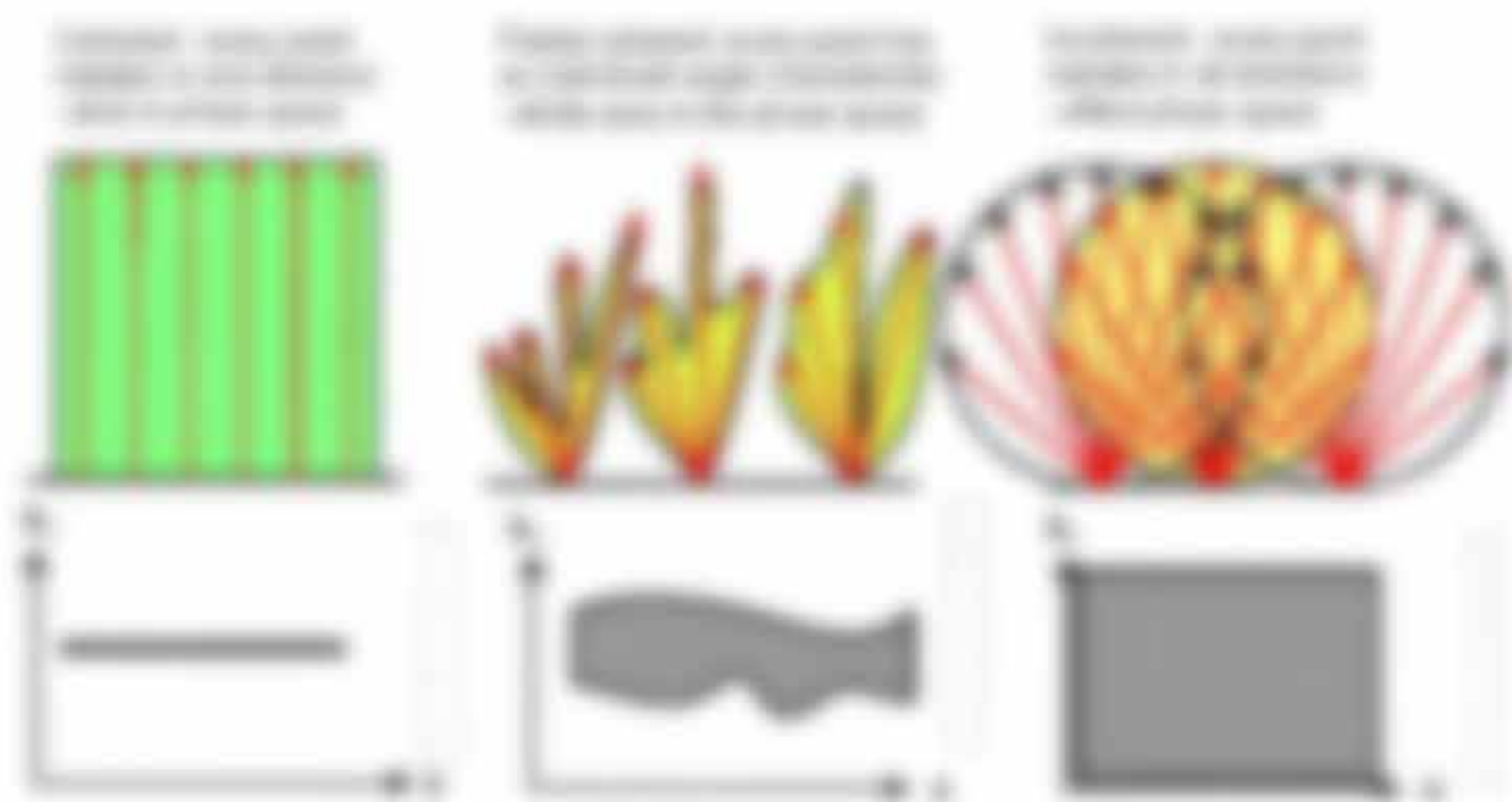


Abbildung 108: Bestimmung der Wellenlänge im Rastergitter. a) Wellenlänge $\lambda < d$, b) Wellenlänge $\lambda = d$, c) Wellenlänge $\lambda > d$. d = Gitterkonstante, λ = Wellenlänge.

Eine räumliche Maß für räumliche Kohärenz ist die Beugungszahl N^2 . Sie ist über $N = \frac{d}{\Delta\lambda}$ ein Maß für die Wellenlänge λ , welche bei einem räumlichen Gitterabstand d (z.B. $\lambda = \frac{d}{N}$) beobachtet werden kann. Eine Formel zur Bestimmung der Wellenlänge λ in Abhängigkeit von N und d lautet:

$$\lambda = \frac{d}{N} \quad \text{mit} \quad N = \frac{d}{\lambda} \quad (10)$$

Kann man die Wellenlänge λ bestimmen, vergleicht sich die Energie und N^2 über die Formel $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = h \cdot \frac{c}{d} \cdot N$.

5.1.3. Optische Schweiß- und Messlichtmessgeräte

Man kann mit der optischen Flussmessung über die Weglängendifferenz $2 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2$ zwischen den Armen eines Interferometers, dadurch auch die auftretende Strahlung untersuchen. Ein geeigneter Aufbau hierfür ist das Michelson-Interferometer.

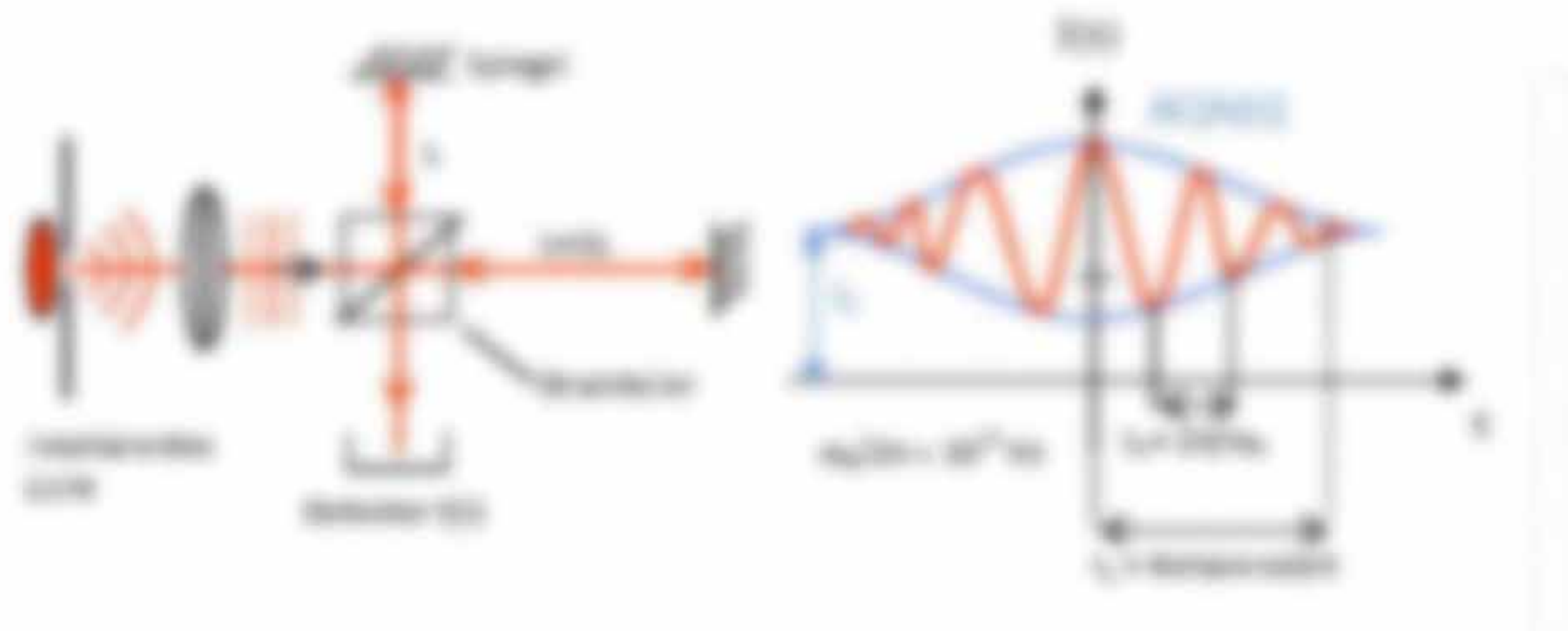


Abbildung 101: Michelson-Interferometer mit L (Licht = Licht) zu einem Michelson-Interferometer. Die Lichtstrahlen werden durch die Spiegel in zwei Richtungen abgelenkt.

Man kann $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ und $E(t+\tau) = E_0 \cos(\omega(t+\tau))$ mit Lichtausbreitung v durch nicht messen, dafür über die Distanzvergrößerung über die Weglängendifferenz $2 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2$:

$$E(t) = \frac{1}{2} (E(t) + E(t+\tau) + E(t-\tau)) \quad \text{mit } \tau = 2(d_1 + d_2) / v \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} (E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(\omega(t+\tau)) + E_0 \cos(\omega(t-\tau))) \\ &= \frac{1}{2} E_0 (\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \omega \tau) + \cos(\omega t - \omega \tau)) \\ &= \frac{1}{2} E_0 (\cos(\omega t) + 2 \cos(\omega t) \cos(\omega \tau)) \end{aligned}$$

Wie auch beim von Ultraschall-Messungen erhält man die optische Schweißfunktion $F(\tau)$ über die Fouriertransformierte der Autokorrelations $E(t)$ (= Michelson-Interferometer)

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L E(t) E(t+\tau) dt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(\omega(t+\tau)) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(\omega t + \omega \tau) dt \quad (5.11) \end{aligned}$$

und man erhält wie in Eq. (5.11) die Power Spectral Density PSD

$$PSD(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(\omega(t+\tau)) dt \quad (5.12)$$

und nach Ableitung über die (2.20) die Fortbewegung $v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt}$

Dies entspricht dem Phasengeschwindigkeit (2.20) bzw. der Gruppengeschwindigkeit (2.20) und ist zu erwarten, wenn man die allgemeine Signal $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 2 \cdot \tilde{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)$ betrachtet. Falls sich ω_1 gegenüber ω_2 so verhält, so sind es zwei Wellen mit ω_1 und ω_2 und ω_1 die mittlere Frequenz ist und

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= 2 \cdot \tilde{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) = 2 \cdot \tilde{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) \\ &= 2 \cdot \tilde{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) = 2 \cdot \tilde{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

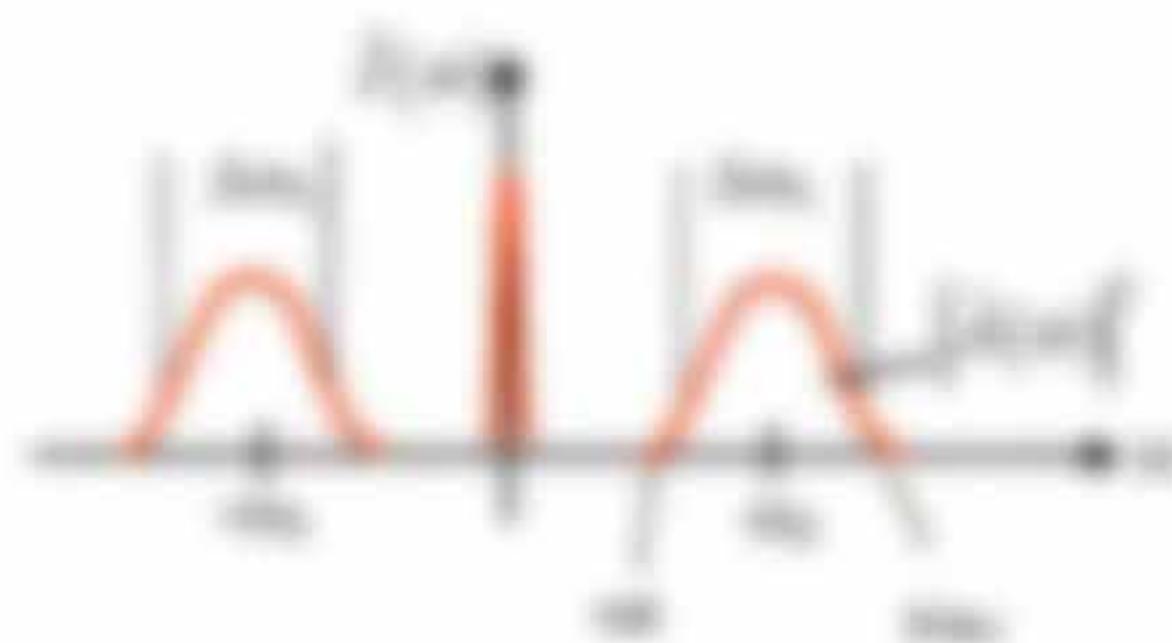


Abbildung 2.10: Veranschaulichung der Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit.

Die Breite $\omega_1 = 2\omega_2$ der Wellenpakete $\tilde{u}_1(t)$ an den Trägerfrequenzen entspricht der mittleren Bandbreite des Lichts, welche sich verringert, wenn die Fortbewegung v_1 steigt und

$$\omega_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot v_1, \quad \omega_2 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{v_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\omega_1}{v_1} = \frac{2\omega_2}{v_1/2}$$

Daraus ergibt sich über die mittlere Frequenz ω_1 und Wellenlänge λ_1 die Frequenzänderung des Lichtes $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\omega_1}{v_1}$ (2.21)

und daraus die Fortbewegung des Lichtes: $v_1 = v_2 = \frac{c \cdot \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{n_2}$ (2.22)

Beispiel:

- Trägerwellen: $\lambda_1 = 700 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ $\Rightarrow n_2 = 1$ (Luft)
- Dispersion: $\lambda_1 = 700 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ $\Rightarrow n_2 = 1,000000$
- Wellenleiter: $\lambda_1 = 10^3 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 10^3 \text{ nm}$ $\Rightarrow n_2 = 1,000000$
- Wellenleiter: $\lambda_1 = 10^3 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 10^3 \text{ nm}$ $\Rightarrow n_2 = 1,000000$
- Wellenleiter (Wellenleiter): $\lambda_1 = 10^3 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 10^3 \text{ nm}$ $\Rightarrow n_2 = 1,000000$

Es wird also gemessen, wie weit alle in der Lichtquelle enthaltenen Wellenlängen überlagert. Nach einer Fouriertransformation im Computer hat man die optische Leistung des Lichtleitersenden Optiks, was somit eine spektroskopische Methode darstellt.



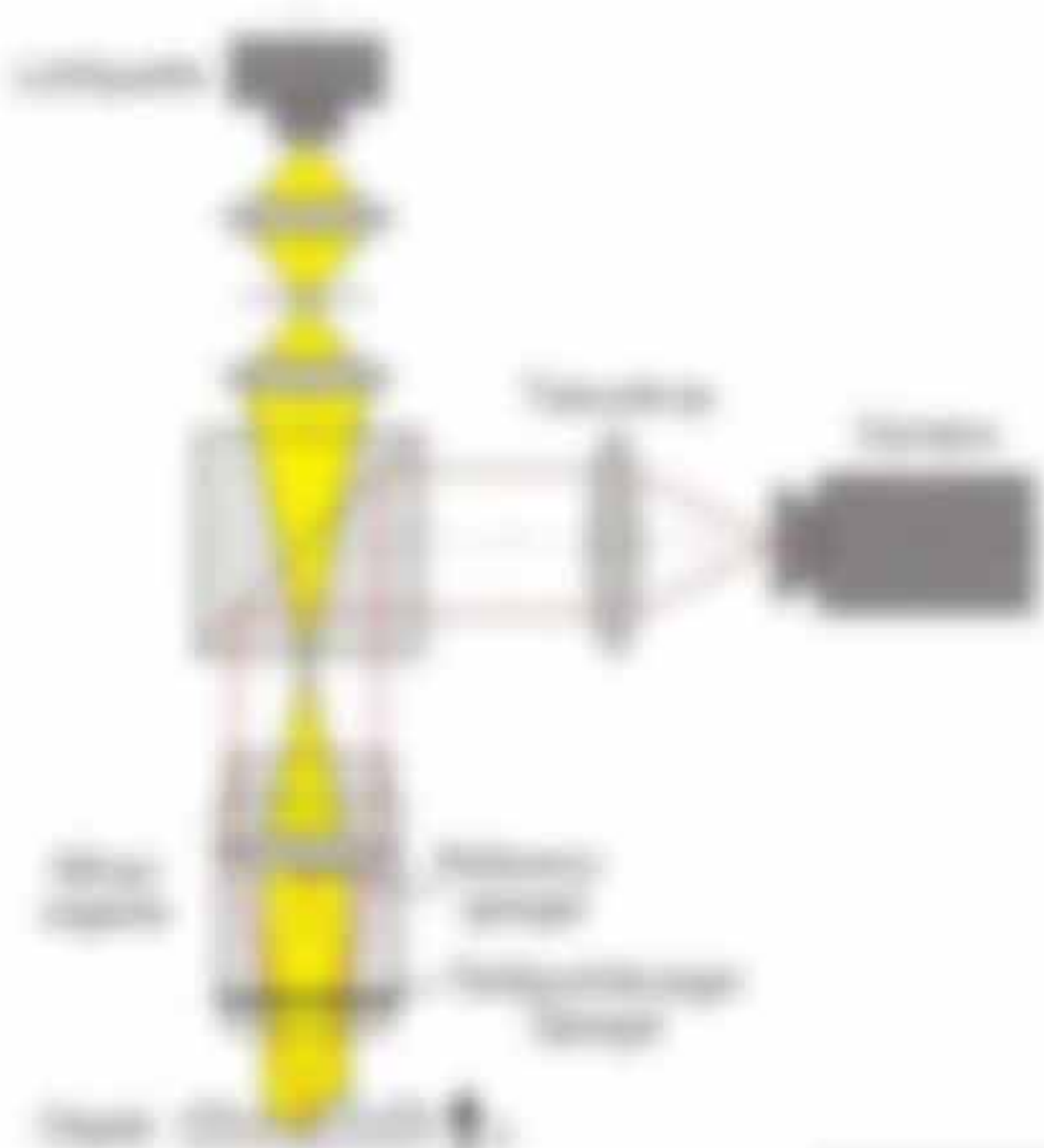
Abbildung 104: Wellenlängen eines Laser-Transmitters. Die Lichtquelle hat in einer hohen Leistung (100 mW) eine in der Fouriertransformation des Licht durch Transmitter nachfolgende komplexe Optik und Wellenlängen erzeugt. Diese sind durch eine Wellenlänge von 100 nm erzeugt. Die optische Leistung des Lichtleiters ergibt die folgenden Wellenlängenverteilung – obwohl es sich um ein Laserlicht handelt, das hochfrequent ist.

Erweiterungen

a) Interferometrie und OCT (Optische Kohärenztomografie)

zur Messung von Stärke und Position der Reflexion an Oberflächen.

Prinzip der Wellenlänge: Das Interferogramm wird nur an der Oberfläche im Bereich 10 Mikrometer erzeugt, was ein weiteres Kriterium für die Messung darstellt.



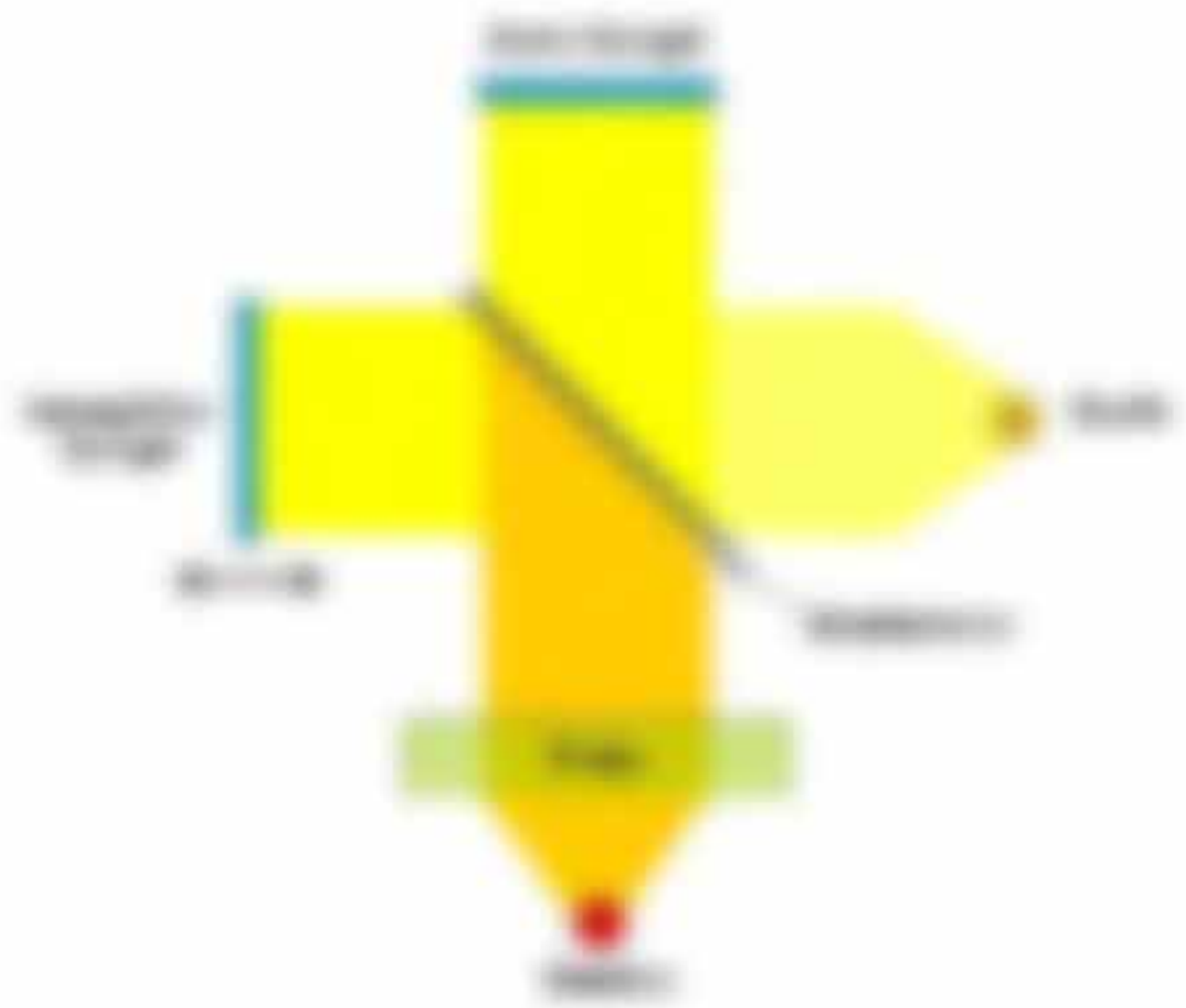
Bei der Interferometrie wird die Phase bzw. die Wellenlänge in einem Schritt in 2 Richtung verfahren (siehe Abbildung 104). Es wird ein Interferogramm aufgenommen, das für jeden einzelnen Punkt der Wellenlänge gemessen wird. Die Wellenlänge der Wellenlänge in jedem Punkt des Interferograms ergibt ein Interferogramm mit einer Wellenlänge von 100 nm, bestehend aus der Trägerfrequenz ω_0 und der Seitenbanden. Das Interferogramm ergibt für ein einzelnes Punkt auf der Kamera Bild und beschreibt über

$$I(x,y) = I_0 + I_1 \cos(k_0 x + \phi(x,y)) + I_2 \cos(k_0 x + \phi(x,y) + \pi)$$

2. Gemessen werden die Wellenlängen, I_0 - entspricht die Höhe des Interferogramms bzw. Intensität, ϕ die Wellenlängen und k_0 die Wellenlängen. I_1 ist die Wellenlänge in der Phase ϕ eine Funktion. I_2 stellt die Wellenlänge dar.

2) Fourier Transformation 2D-Spektroskopie

Die Infrarotspektroskopie ist ein Analyseverfahren und arbeitet im Bereich 1 - 10000 μm . Die 2D-Spektroskopie dient zur Strukturcharakterisierung unbekannter Substanzen oder zur quantitativen Bestimmung von bekannten Substanzen, deren Identifikation anhand eines Referenzspektrums möglich ist. Im IR-Bereich (1000 - 4000 cm^{-1}) charakterisieren Molekschwingungen und im 2000-Bereich (2000 - 4000 cm^{-1}) Molekschwingungen.



Man verwendet eine breitbandige Lichtquelle mit Spektrum $I_{\text{Licht}}(\nu)$ über einem Wellenlängenbereich $\Delta\nu$ und platziert vor dem Detektor eine Probe mit Transmission $T_{\text{Licht}}(\nu)$. Somit lässt sich die spektrale Transmission $T_{\text{Licht}}(\nu)$ der Substanz einfach aus dem gemessenen Wellenlängen ν erhalten, wobei die Intensität $I_{\text{Licht}}(\nu)$ ist:

$$I_{\text{Licht}}(\nu) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_{\text{Licht}}(\nu) T_{\text{Licht}}(\nu) e^{-\mu(\nu) \cdot d} d\nu \quad \text{mit} \quad T_{\text{Licht}}(\nu) = \frac{I_{\text{Licht}}(\nu)}{I_{\text{Licht}}(\nu)} \quad (1)$$

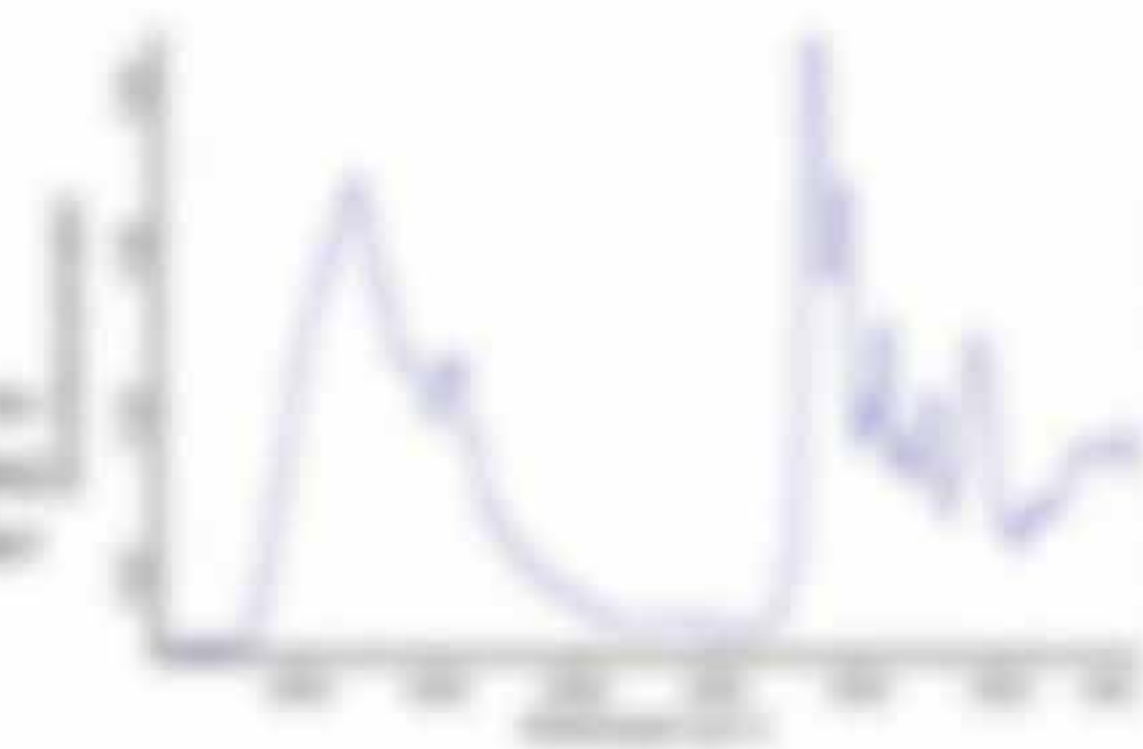
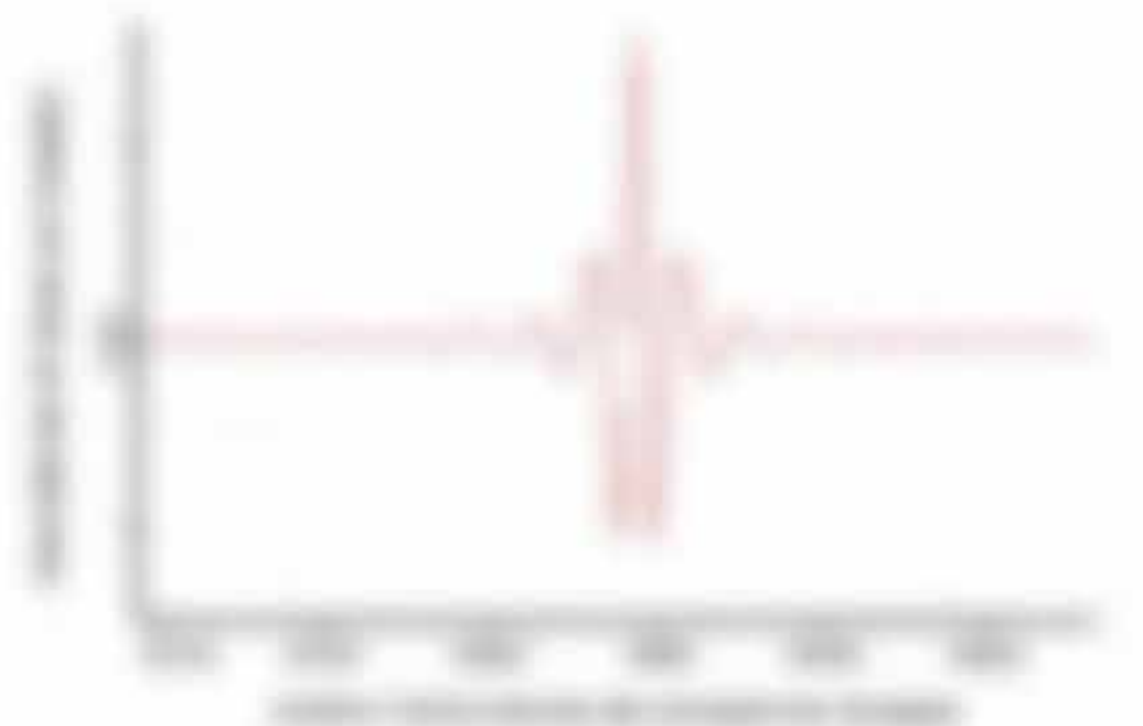
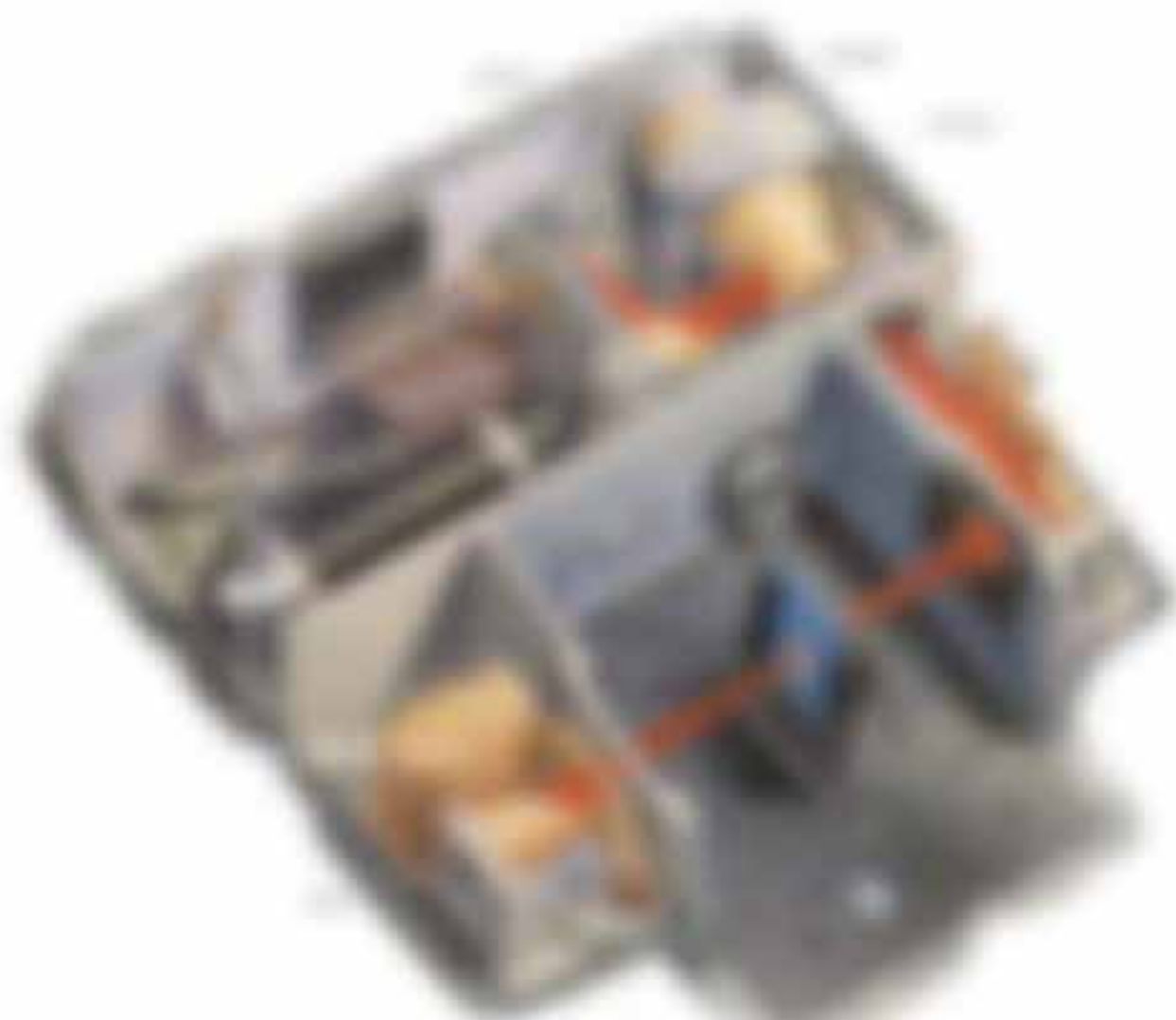
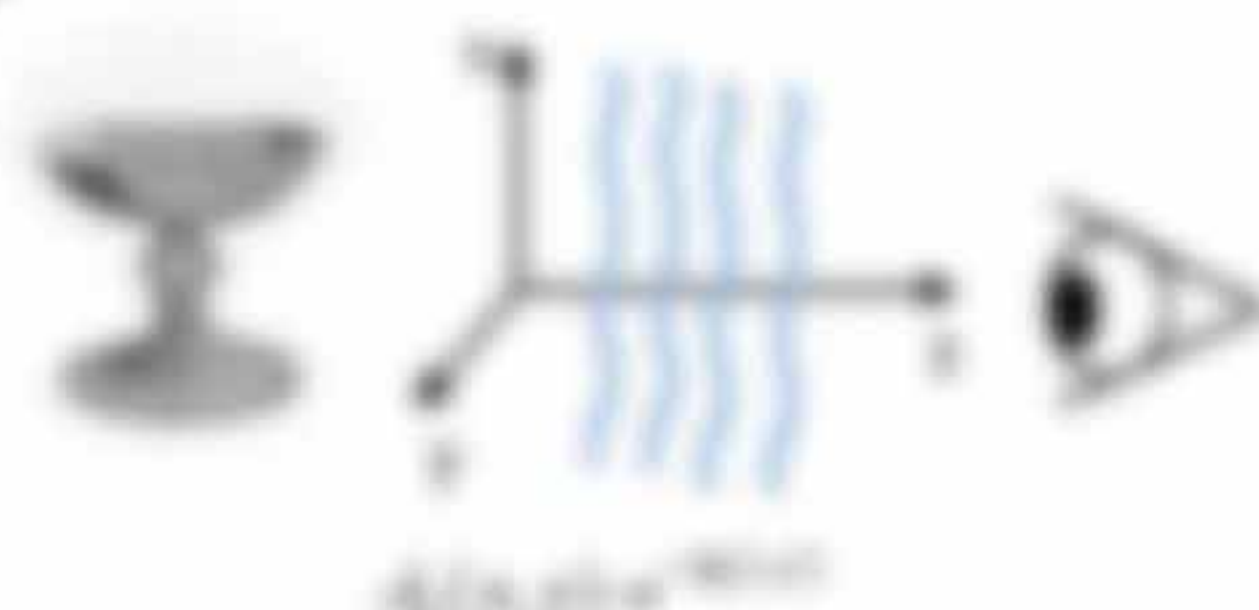


Abbildung 108 Infrarot-Spektrometer Aufbau eines IR-Spektrometers. Die Lichtquelle ist orange, die Probe ist blau, der Detektor ist rot und die optischen Elemente sind grau.

1.4. Prinzip der Holografie

(griechisch „ganz“ + „schreiben“)

Was bedeutet ein Lichtstrahl? Eine Welle mit Phase und Amplitude $A(x,y) \cdot e^{i\omega t}$ tritt auf unsere Augen. Die Phase enthält über die Strukturen der Lichtgegenstände, welche an jedem Punkt des Objekts unterschiedlich in Richtung deformiert bzw. nur mit einer Augen aufgenommen werden.



Problem beim Lichtstrahl: Die Phaseninformation geht verloren!

Lösung: Lichtstrahl (Licht) das über die Phase der Lichtwellen selbst zu speichern und dann wiederherstellen dafür gibt es Licht des Lichtspektrums.

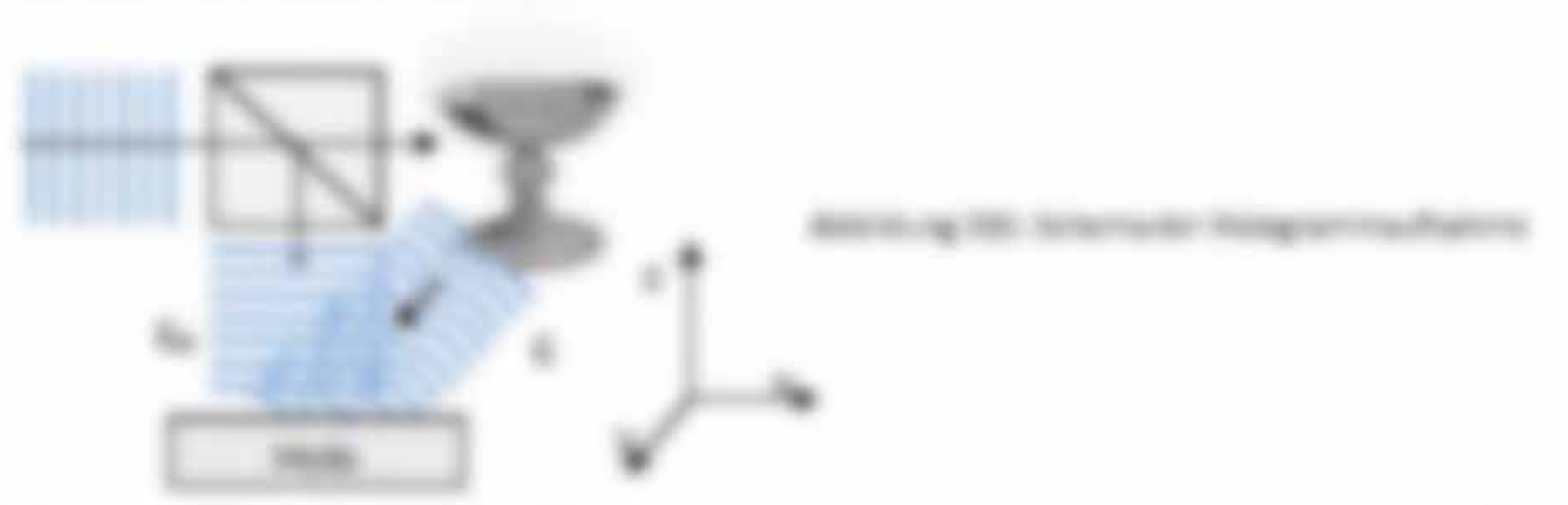
Die einfachere Methode ist wieder die Interferenzverfahren. Bedingung ist, dass die Kohärenzzeit des Lichts größer ist als die Lichtlaufzeit ist!

Bildung: Man erzeugt auf einem transparenten (bzw. bzw. photosensibilisierte Schicht) eine Interferenz von einer Referenzwelle $E_1(x,y) = A_1 \cdot e^{i\omega t}$ und einer am Objekt reflektierten Objektwelle $E_2(x,y) = A_2(x,y) \cdot e^{i\omega t}$. Insgesamt der Interferenzmuster $E_{tot}(x,y)$ schreibt sich die Form:

$$E_{tot}(x,y) = |E_1(x,y) + E_2(x,y)|^2 = |A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2(x,y) \cdot e^{i\omega t}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

1.20

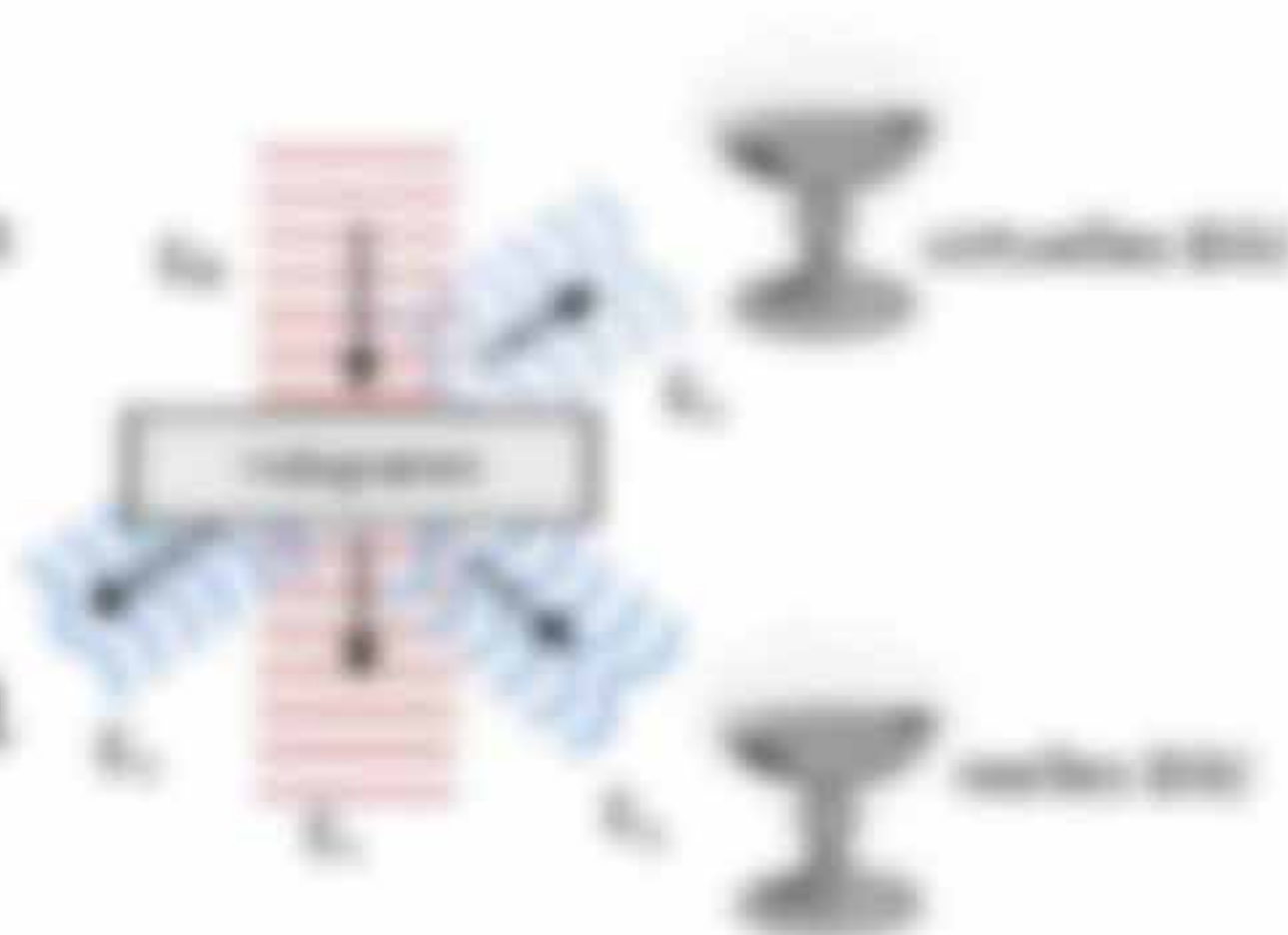
Interferenz



Bestimmen des Nennwertes

Berechnung des Nennwertes $E_{\text{Nenn}}(x, y)$ mit Referenzwerte E_{Ref}

Bestimmung des Nennwertes des Nennwertes $E_{\text{Nenn}}(x, y)$ mit Referenzwerte E_{Ref} und dem an Nennwert gemessenen Wert E_{Mess}



Das Nennwert wird nach dem Bestimmungswert E_{Ref} als eine Transmissionsfunktion betrachtet, welche mit der Referenzwerte E_{Ref} multipliziert wird. Es entstehen eine ungenügende und zwei genügende Werte.

$$\begin{aligned}
 E_{\text{Nenn}}(x, y) &= E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) \quad \text{Standardwert} \\
 &= E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) = E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) \\
 &= E_{\text{Ref}}(x, y) \quad + \quad E_{\text{Ref}}(x, y) \quad + \quad E_{\text{Ref}}(x, y)
 \end{aligned}$$

Die volle Nennwertgleichung ist die transmittierte Referenzwerte und lautet:

$$E_{\text{Nenn}}(x, y) = (E_{\text{Ref}}(x, y) + E_{\text{Ref}}(x, y)) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) \quad \text{Standardwert}$$

Es entstehen zwei Werte in der 1. Nennwertgleichung

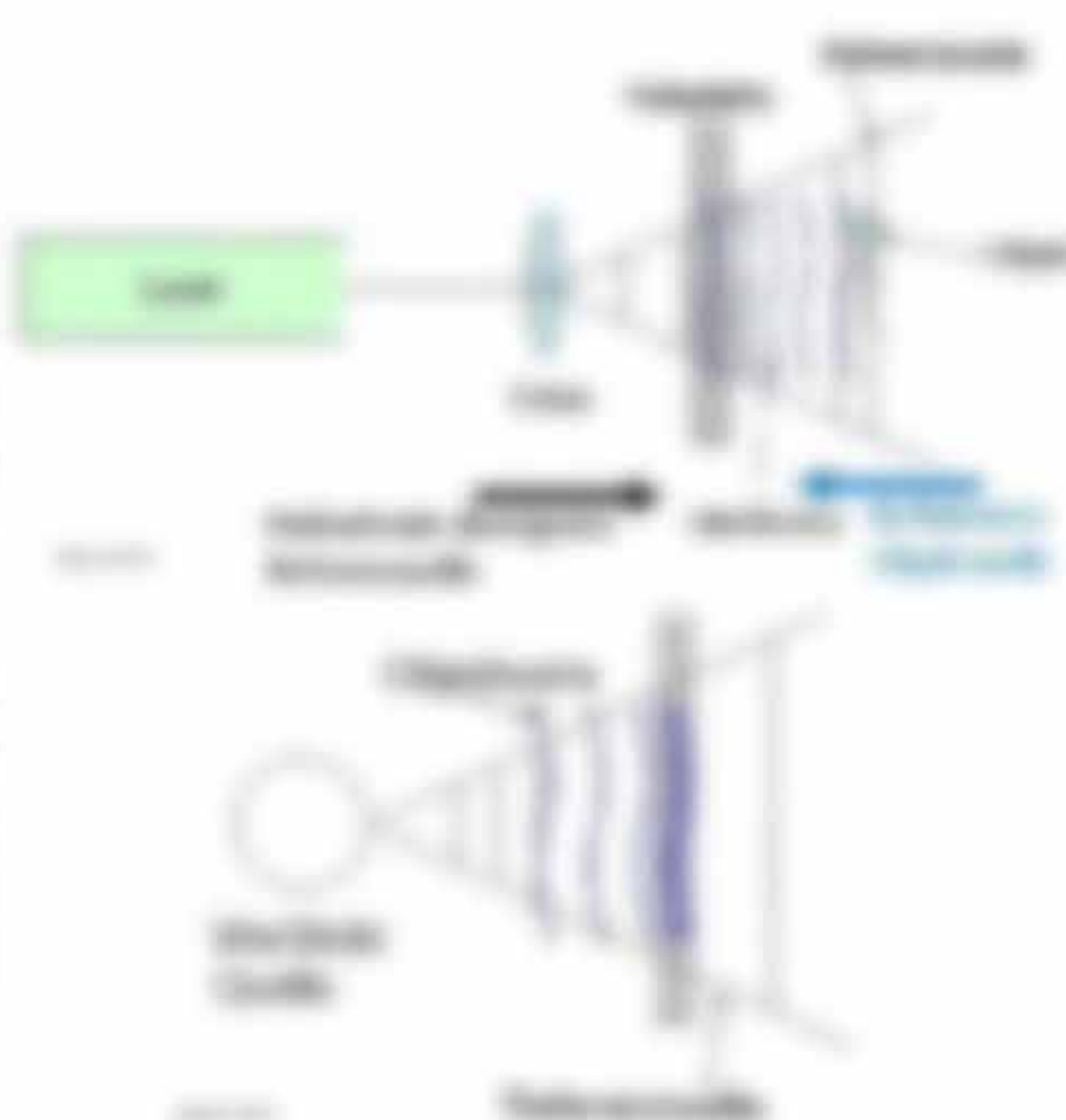
$$E_{\text{Nenn}}(x, y) = E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) = E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) \quad \text{Standardwert, wenn die}$$

$$E_{\text{Nenn}}(x, y) = E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y) = E_{\text{Ref}}(x, y) \cdot E_{\text{Ref}}(x, y)$$

Multiplizieren

Die Erleichterung in die volle Nennwertgleichung wird gebracht durch eine weitere Gleichung, welche aus der Multiplikation von Nennwert Referenzwerte und Standardwert entsteht. Im Nennwert wird ein Wert E_{Ref} erzeugt.

Bei Bestimmen des Nennwertes Nennwertes mit werden zwei Nennwertgleichungen, die gleiche Punktepunkte entstehen nur Nennwertes Nennwertes in der 1. Nennwert Gleichung und Nennwertes Nennwertes Nennwertes.



6. Lichtstreuung und Plasmonik

Lernziele für diesen Kapitel

- Bisher wurde die Wechselwirkung Licht mit Materie weitgehend vernachlässigt. In der breiten Grenzschicht mit einem optischen Transferkoeffizienten kann jegliche Lichtstreuung formal gelöst werden, obwohl diese gerade die Informationen über die Objekt bzw. den Kontakt in sich liefert.
- Die wichtigsten Begriffe, Theorien und Formeln bei der Lichtstreuung, welche man oft mit Nanostrukturen beschreiben kann.
- Resonanz und Streuung an nicht-linear reagierender Materie erzeugen Plasmonen in anderen Farben – wie auch Anregungsprozesse in Fluorophoren und Quantenpunkten.
- Im Fall der Streuung an metallischen Strukturen werden Plasmonen angeregt, welche in einem nichtlinearen Verhalten Licht emittieren. Dieses Licht ist in vielen verschiedenen Anwendungen einsetzbar, was unglaubliche Möglichkeiten für zukünftige optische Technologien eröffnet. Wie funktioniert das?



6.1. Lichtstreuung

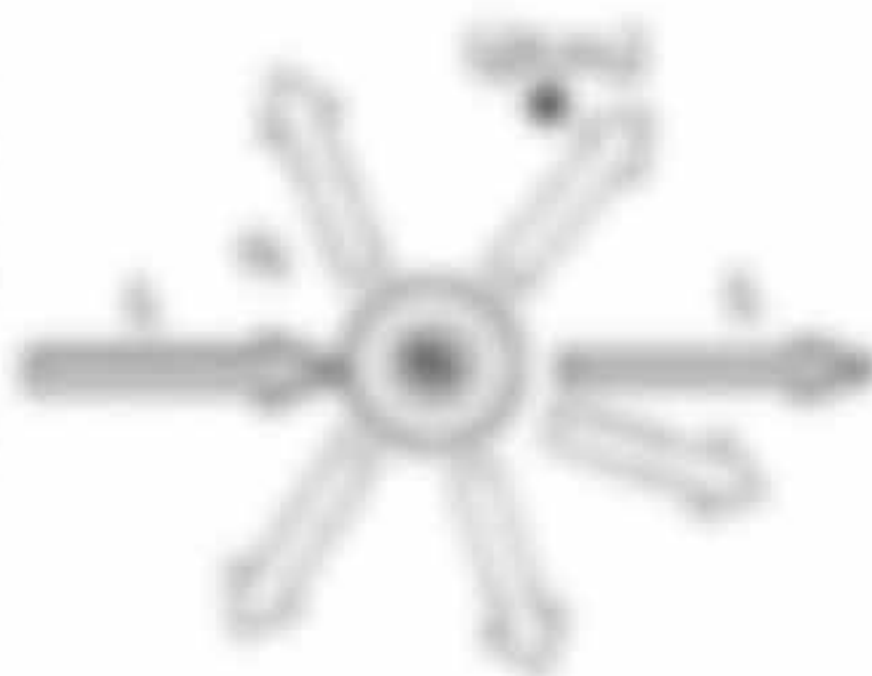
Die Wechselwirkung von Licht mit Materie basiert auf Lichtstreuung. Nur über diese Prozesse lassen sich die Wirkmechanismen in der Absorption, Reflexion und Brechung, Farben und Formerkennung richtig verstehen.

6.1.1. Definitionen und Grundlagen

Es gibt zwei grundsätzliche Arten der Streuung

a) elastische + elastische Streuung

Beim Streuung tritt keine Änderung der Raumfrequenz ein, $\Delta k_1 = \Delta k_2$ und keine Änderung der Zeitfrequenz ein, $\omega_1 = \omega_2$, d.h. Anregung und Energieverluste sind vernachlässigbar. Man spricht von elastischer Streuung mit $\omega_1 = \omega_2$, $\Delta k_1 = \Delta k_2$ (Raumfrequenz der Streuer)



$\omega_1 = \omega_2$ gestreute Wellen alle im Frequenz

entfallender um $\Delta k_1 = \Delta k_2$ versetzt ($\omega_1 = \omega_2$)

$\omega_1 = \omega_2$ gestreute Wellen alle im Frequenz entfallender um Δk_1 versetzt ($\omega_1 = \omega_2$)

b) inelastische + inelastische Streuung

mit $\Delta k_1 = \Delta k_2$ und $\omega_1 \neq \omega_2$ (Frequenzänderung bzw. Verluste bestimmter Frequenzen) Resonanzstreuung falls $\omega_1 = \omega_2$, d.h. Plasmonenanregung und -verluste

Bestrahlungsdichte (Strahlungsleistung)

Die Anzahl von Photonen N durch den Betragswinkel Ω des gestreuten Feldes und verteilt mit dem Abstand r^2 , der Streurichtung \mathbf{k} , bzw. Ω ist und der Frequenz ν des Lichts

$$I(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dN}{dt d\Omega} = I(\nu, \mathbf{k}, \nu) \quad (5.1)$$

Strahlungsleistung P_{str}

$P_{\text{str}} = Q_{\text{str}} \cdot A$, beschreibt den Anteil Q_{str} der gestreuten Photonen multipliziert mit der Querschnittsfläche A , des Strahlers

$$P_{\text{str}} = \int I(\nu, \mathbf{k}, \nu) \cdot A \cdot d\Omega = \frac{1}{4\pi} P_{\text{str}} \cdot \int d\Omega = \frac{1}{4\pi} P_{\text{str}} \cdot 4\pi = P_{\text{str}}$$

(5.2)

Beispiel: Streustrahlung für einen Dipol ist $P_{\text{str}}(\nu) = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi \epsilon_0} \nu^3$ (a = Polarisationswert), wobei $P_{\text{str}}(\theta) = \sin^2 \theta \cdot P_{\text{str}}(\nu)$. Somit stellt man einen Strahler bzw. einen Strahler bei $\theta = 0$ im Vakuum im freien Vakuum (Vakuum) durch die Atmosphäre.

Energieerhaltung

Das einfallende ν -strahlungsleistung P_{ein} wird P_{ref} gestreut, P_{abs} absorbiert und dann meist in Wärme umgewandelt

Erhalten $P_{\text{ref}} + P_{\text{abs}} = P_{\text{ein}} = \text{Absorption}(\nu, \nu)$

$$P_{\text{ref}}(\nu) + P_{\text{abs}}(\nu) = P_{\text{ein}}(\nu) = \frac{1}{4\pi} \frac{dN_{\text{ref}}}{dt d\Omega} + \frac{dN_{\text{abs}}}{dt} = \frac{dN_{\text{ein}}}{dt} \quad (5.3)$$

mit $N = \int I(\nu, \mathbf{k}, \nu) \cdot A \cdot d\Omega$ im ν -Raum

Die Querschnitte Q_{str} werden im Verlauf des Kapitels definiert.

Erhaltung

Es gilt, dass diese Absorption der Gesamtenergie vor und nach dem Streuen des Photons mit einem Faktor erhalten bleibt $N_{\text{abs}} = N_{\text{ref}}$

wobei $p = \hbar \cdot k = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$ der Impuls eines Photons ist. Ein Impulsübertrag $\Delta p = 0,200 \text{ eV}$ von \mathbf{k} kann auf ein Photon übertragen werden.



Streuungstypen

- Rayleigh-Streuung ($d \ll \lambda$):
→ Gummikügelchen (z.B. Himmel)



- Rayleigh-Gans-Streuung bzw. auch Mie-Streuung ($d \approx \lambda$):
→ Makromoleküle, Aerosole, Zehnergrößen



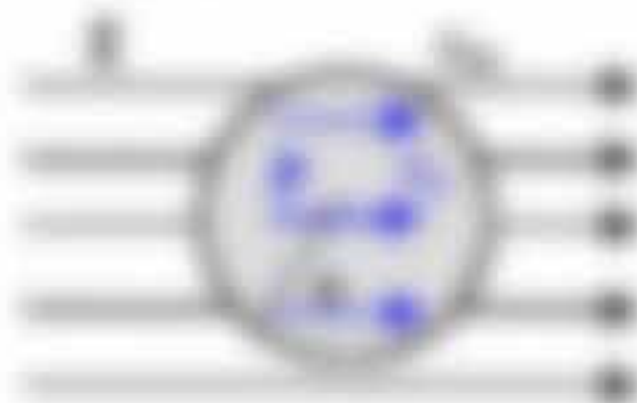
- Mie-Streuung ($d \approx \lambda$):
→ z.B. Tropfenchen, Nanopartikel → Mehrfachstreuung



Formfaktor

Die in Abb. 2.18 angeführte Formfunktion F entspricht dem Dipolmoment p pro Volumen V , also der Dipolmomentdichte $\vec{P} = V\vec{p} = p\vec{V}$ mit $\vec{P} =$ Amplitudendichte

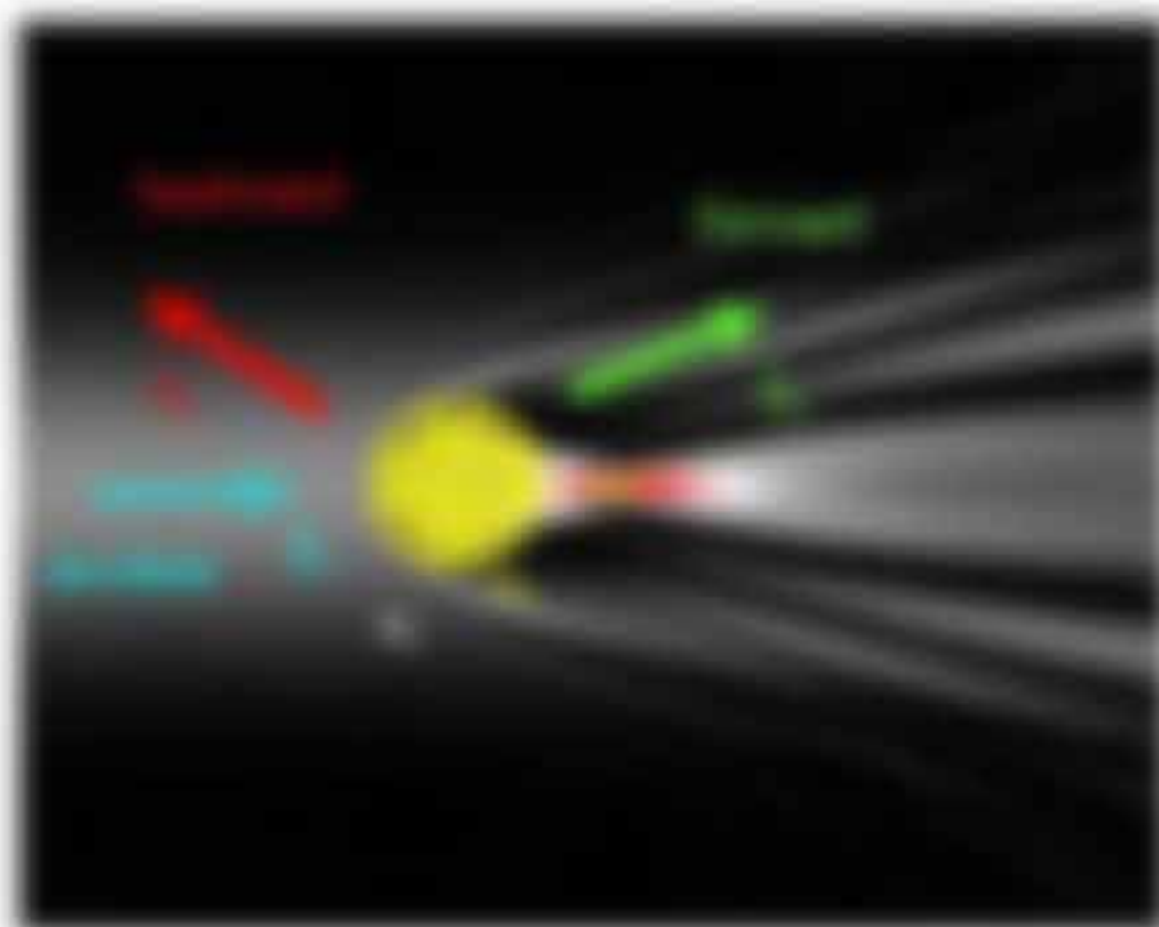
Das Dipolmoment wird induziert durch ein lokales Feld \vec{E}_{lok} , sodass $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_{\text{lok}}$, wobei $\alpha =$ molares, $\alpha =$ molares (z.B. im Inneren des Streuers wirkt die gesamte Formfaktorheit α auf das lokale Feld $\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E} + \vec{P} / (\epsilon_0 \epsilon_r)$. Dieses wird durch benachbarte, induzierte Dipole gegenüber dem vorhandenen Feld \vec{E} verändert.



Aus $\vec{P} = \alpha p \vec{E} = \alpha \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ und $\vec{P} = V \alpha \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_{\text{lok}} = V \alpha \epsilon_0 \epsilon_r (\vec{E} + \vec{P} / (\epsilon_0 \epsilon_r))$ ergibt sich unter Nutzung der Formfaktorheit eines Dipols bzw. einer kleinen Kugel mit Volumen $V = 4\pi/3 r^3$ nach Gittermoleküle

$$\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{V}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{p}{r^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{V}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{r^3}$$

2.4



Man hat also in die relative Brechzahl $n = n_2/n_1$, bzw. $n^2 = \epsilon_2/\epsilon_1$. Obwohl die Ableitung von 2.18 für eine Kugel im elektromagnetischen Feld gemacht wurde, ist 2.18 ebenso gültig für einen Dipol im elektromagnetischen Feld.

Abbildung 2.19: Die Streuungseigenschaften, welche Abhängigkeit von Winkel von Dipolmoment gibt. In einem 3D-Dipolmoment ist ein symmetrisches Streuung. Die am stärksten Streuung tritt bei Winkel von 90° im Dipolmoment \vec{p} auf. Die Streuung ist am geringsten und verschwindet bei Winkel von 0° und 180° .

Beispiel: Beugungsgitter

Bestimmen Sie E_{\perp} und E_{\parallel} , wenn man senkrecht (\perp) und parallel (\parallel) zur Beugungsebene über die Amplitudenbeiwerte E_{\perp} des Beugers setzt

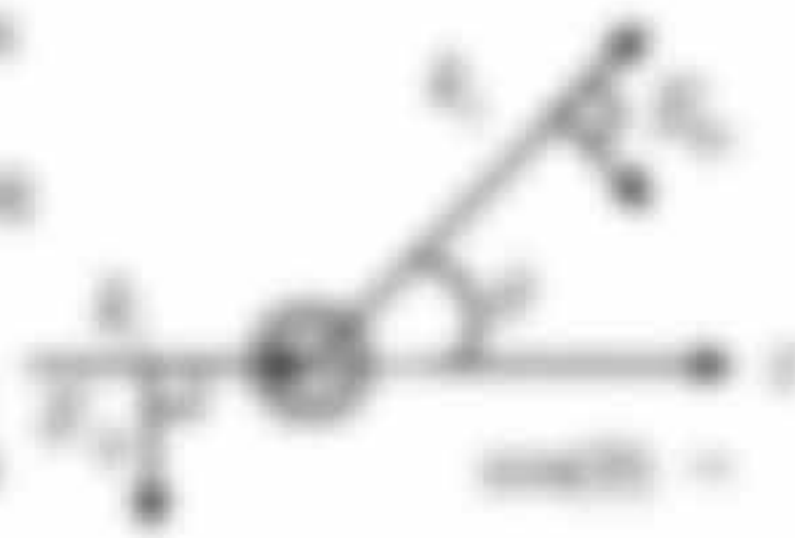


$$\begin{pmatrix} E_{\perp,0} \\ E_{\perp,1} \\ E_{\perp,2} \\ E_{\perp,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\phi} & e^{i\phi} & e^{i\phi} & e^{i\phi} \\ e^{i2\phi} & e^{i2\phi} & e^{i2\phi} & e^{i2\phi} \\ e^{i3\phi} & e^{i3\phi} & e^{i3\phi} & e^{i3\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\perp} \\ E_{\perp} \\ E_{\perp} \end{pmatrix}$$

10

Man hat eine Kugellinse, welche entsprechend den für den Strahl charakteristischen Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} richtungspolung unabhängig moduliert wird (siehe Abbildung 10). Bei Kugelbeugern sind die Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} für diese Kugel mit Durchmesser $d = \lambda$ gilt außerdem $E_{\perp} = E_{\parallel}$ (siehe unten)

$$\begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}$$



Die Beugungsebene ist bestimmt durch die beiden Vektoren \mathbf{k}_{\perp} und \mathbf{k}_{\parallel} . Der Ausbreitungswinkel θ ist relativ zur optischen Achse $\theta = \theta_{\perp}$.

Man kann zeigen sich für unpolares Licht mit $E_{\perp} = E_{\parallel}$ die getrennten Beiwerte $E_{\perp} = E_{\parallel} = E_{\perp} = E_{\parallel}$ für Kugelbeugern mit $d = \lambda$ ist

$$E_{\perp} = E_{\parallel} = E_{\perp} = \frac{1}{2} (E_{\perp} + E_{\parallel}) \quad (10)$$

Abbildung 10: Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} für Kugelbeugern mit $d = \lambda$

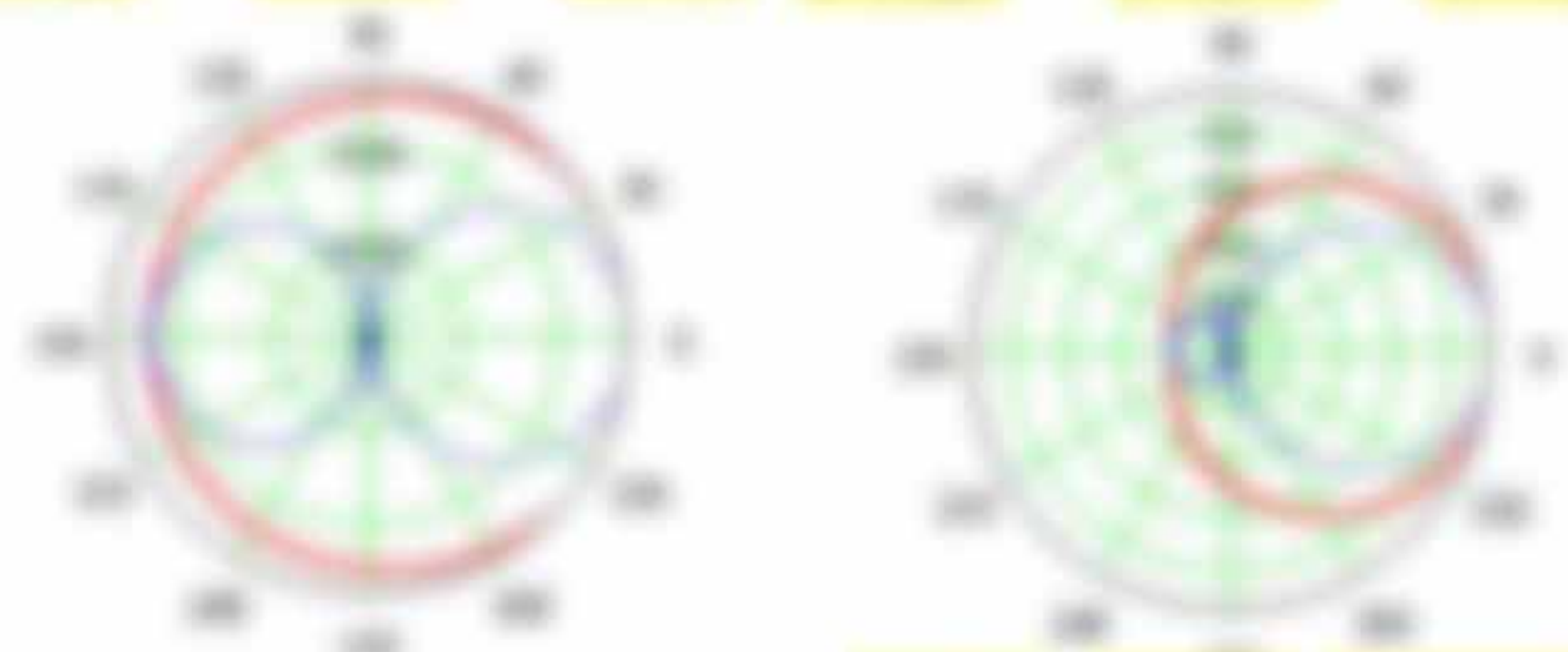


Abbildung 11: Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} für Kugelbeugern mit $d = \lambda$

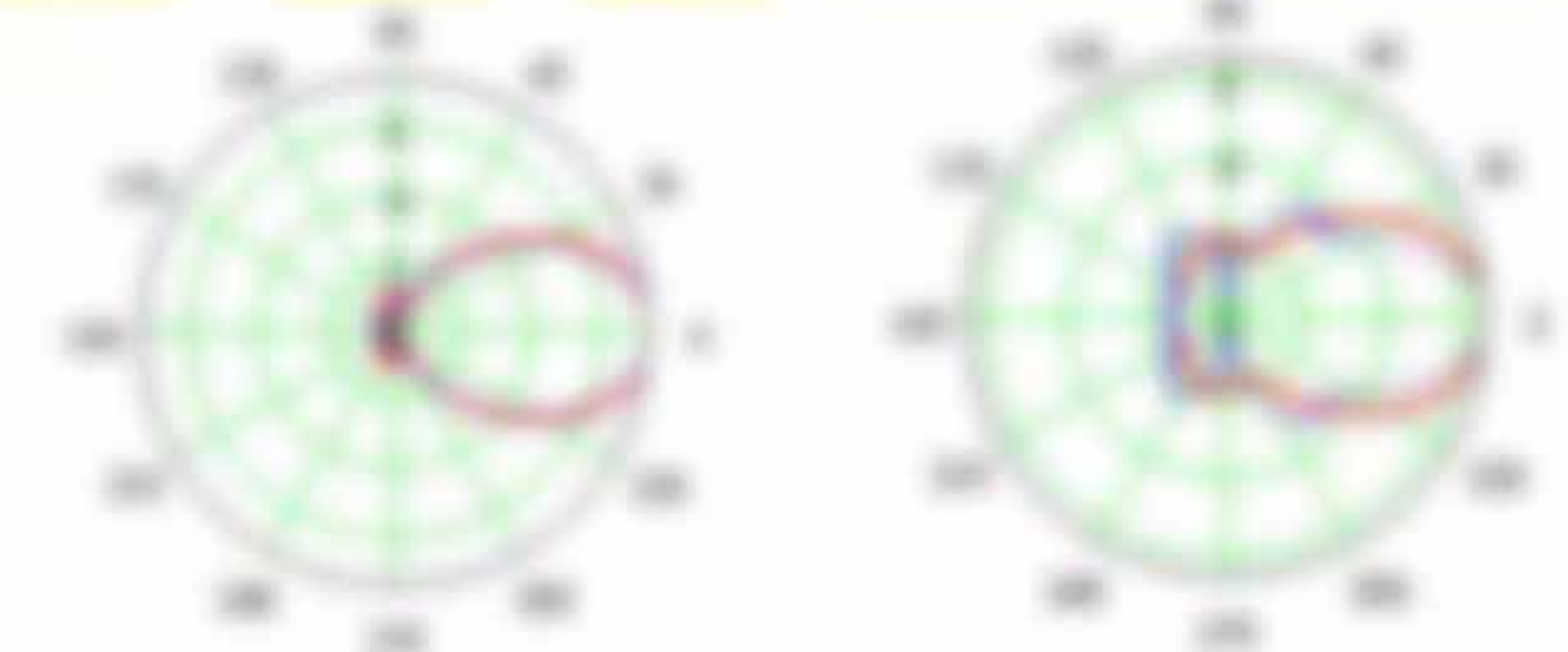


Abbildung 10: Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} für Kugelbeugern mit $d = \lambda$. Die Beugungsebenen E_{\perp} und E_{\parallel} sind durch die Vektoren \mathbf{k}_{\perp} und \mathbf{k}_{\parallel} bestimmt. Der Ausbreitungswinkel θ ist relativ zur optischen Achse $\theta = \theta_{\perp}$.

5.1.1. Eigenschaften und Effizienz

Rechnerische Verfahren

Es hängt, wie man die gesamte von Fourier aufgenommene (potenzielle) Energie dadurch ermitteln kann, indem man lediglich die Amplituden $C_n = C_{-n}$ unter $n = 0$ der spektralen Achse bestimmt.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \tag{5.1}$$

Es gilt für Fourier darstellbar zu sein, also keine Sprünge gibt $C_n = C_{-n}$

Für diese Fourier von Rechteck oder Rechtecke Strom liefert man für die Fourierkoeffizienten, die $f(t) = 1$ ist $C_n = 1/n$ sein mag.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{jn\omega} e^{-jn\omega t} \right]_0^T \tag{5.2}$$

wobei (5.2) die Fourierkoeffizienten der Rechteckfunktion der Breite T ist und $f(t) = 1$ ist.

Man kann nun mittels der Formel von Parseval-Mosewits Gleichung (5.3) die Anzahl der gesamten Potenzen direkt bestimmen, so die diese Fourier darstellbar ist

$$C_n = C_{-n} = C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \tag{5.3}$$

Effizienz

Die Effizienz $\eta_n = C_n^2 / C_0^2$ gibt an wie viele Potenzen pro Fourierkoeffizient C_n gehen werden. Die Effizienz $\eta_n = C_n^2 / C_0^2$ gibt an wie viele Potenzen pro C_n verloren werden. Die Effizienz $\eta_n = C_n^2 / C_0^2$ gibt an, wie viele Potenzen pro Fourierkoeffizient C_n durch einen Verlust pro Dämpfungsfaktor übertragen.

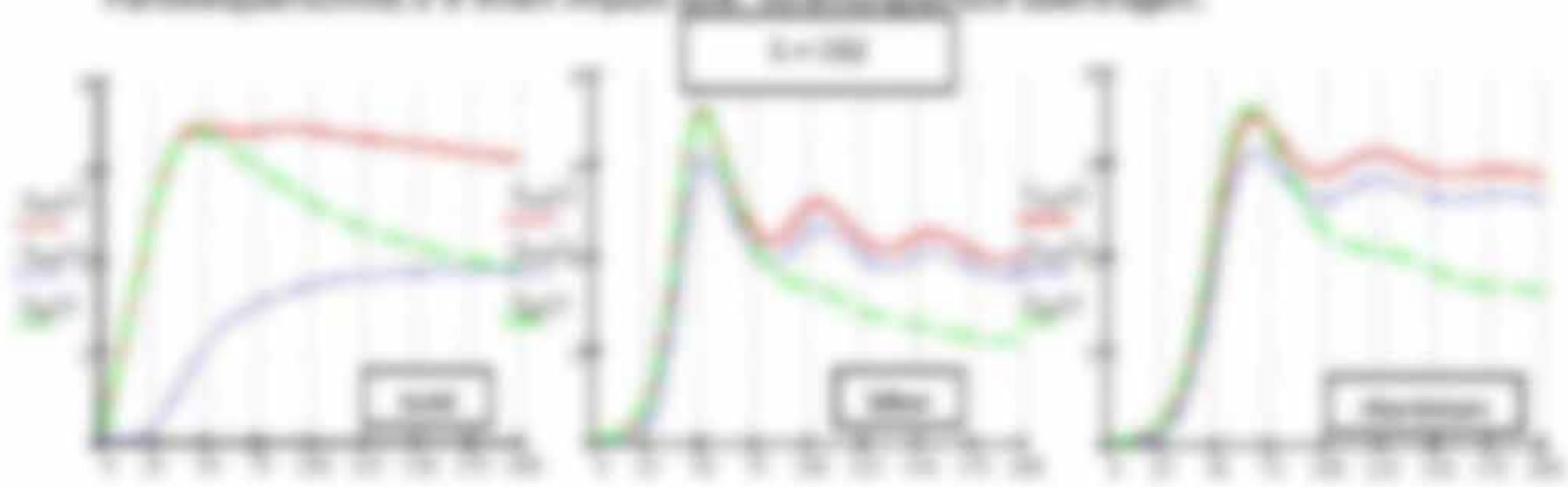


Abbildung 5.1: Effizienz. Drei von Effizienzen für Rechteckimpulse, hier für $f(t) = 1$ (50% Duty Cycle) übertragen (50%, 25% und 10% Duty Cycle) und dementsprechend $C_n = 1/n$ (50%, 25% und 10% Duty Cycle) ist die Effizienz $\eta_n = C_n^2 / C_0^2$ ist $\eta_n = 1/n^2$.

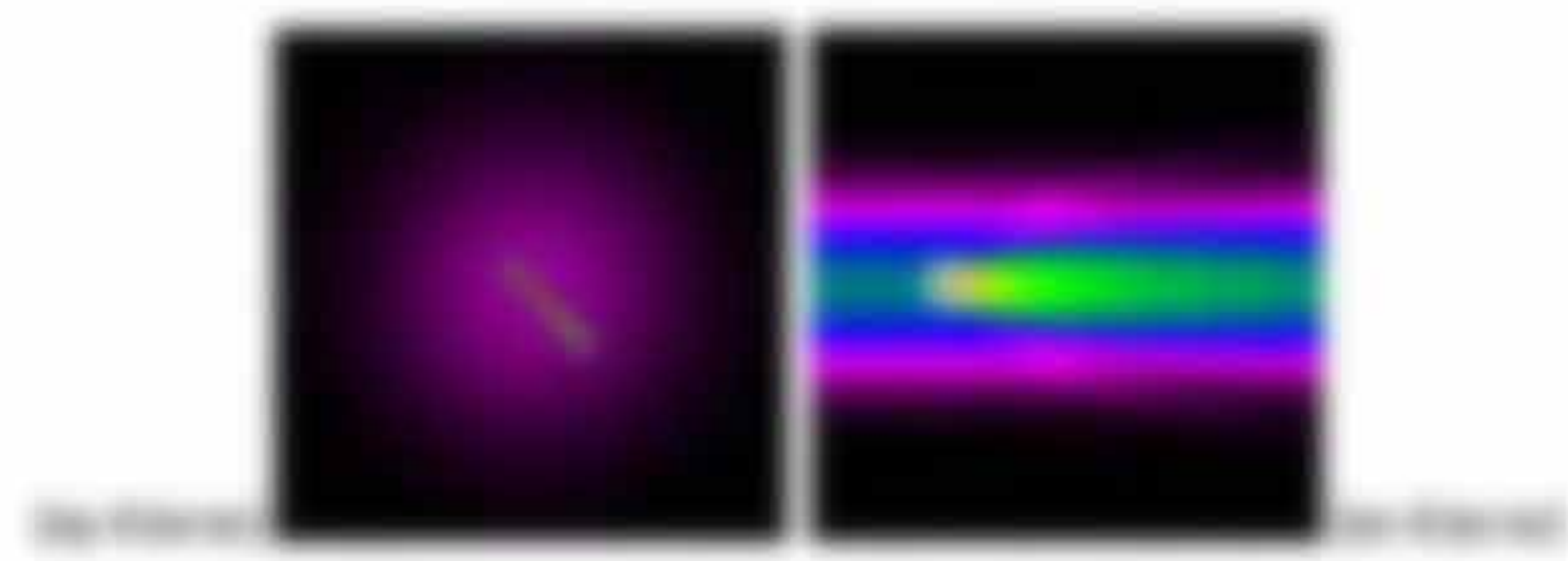
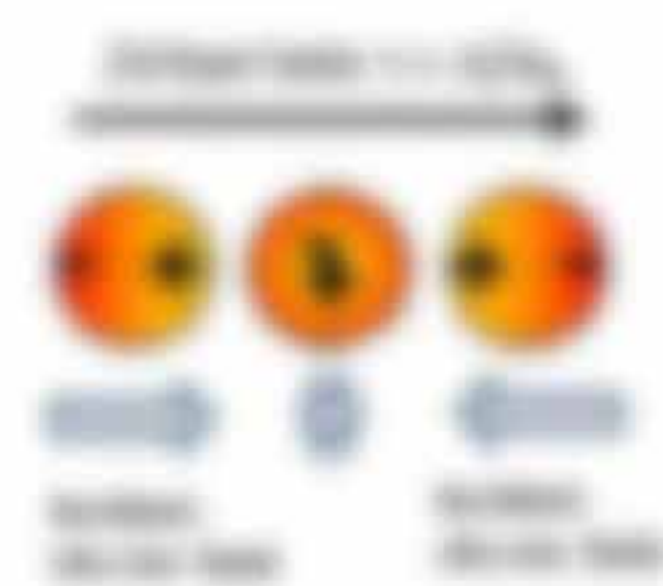


Abbildung 10.10: Ausbreitung einer Wellenpaket in einem homogenen Medium (links) und in einem Medium mit einem Gradienten (rechts). Quelle: [10.10]

6.2. Oberflächenplasmonen und Partikelplasmonen

In Kapitel 2.9 (siehe in Material) wurde die Dispersionsgleichung (2.95) durch die dielektrische Permittivität (dielektrische Funktion) $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$ für Metalle beschrieben, wobei man im Grenzfall (2.95) nimmt, dass Leitungsplasmonen selbst erregbar sind (Dämpfung $\Gamma \neq 0$) und keine Eigenfrequenzen $\omega_p = 0$. Wir finden $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2}$ mit der Plasmafrequenz $\omega_p = \omega_p \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2}{\omega^2}}$, welche verschiedene Metalle durch die Leitfähigkeit σ und deren Atomdichte N unterscheidet. Danach erregen die Elektronen (EP) auf der Plasm, haben ein $\epsilon(\omega) < 0$ und reflektieren gut (siehe Fig. (2.95)).



Ein etwas genaueres Bild liefert die

6.2.1. Drude-Lorentzmodell (DL)

Man wird nun die Dämpfung $\Gamma = \nu = 1/\tau$ der freien Elektronen durch Stöße mit Gitterionen berücksichtigen. Γ entspricht einer Halbwertszeit, die (effektiv) immer ist ν die Fermi-Geschwindigkeit und L die mittlere freie Weglänge. Die dielektrische Funktion lautet entsprechend (Eq. (2.95))

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \text{ mit } \omega_p^2 = 4\pi N e^2/m \text{ und } \epsilon(\omega) = \frac{E(\omega)}{E_0(\omega)}$$

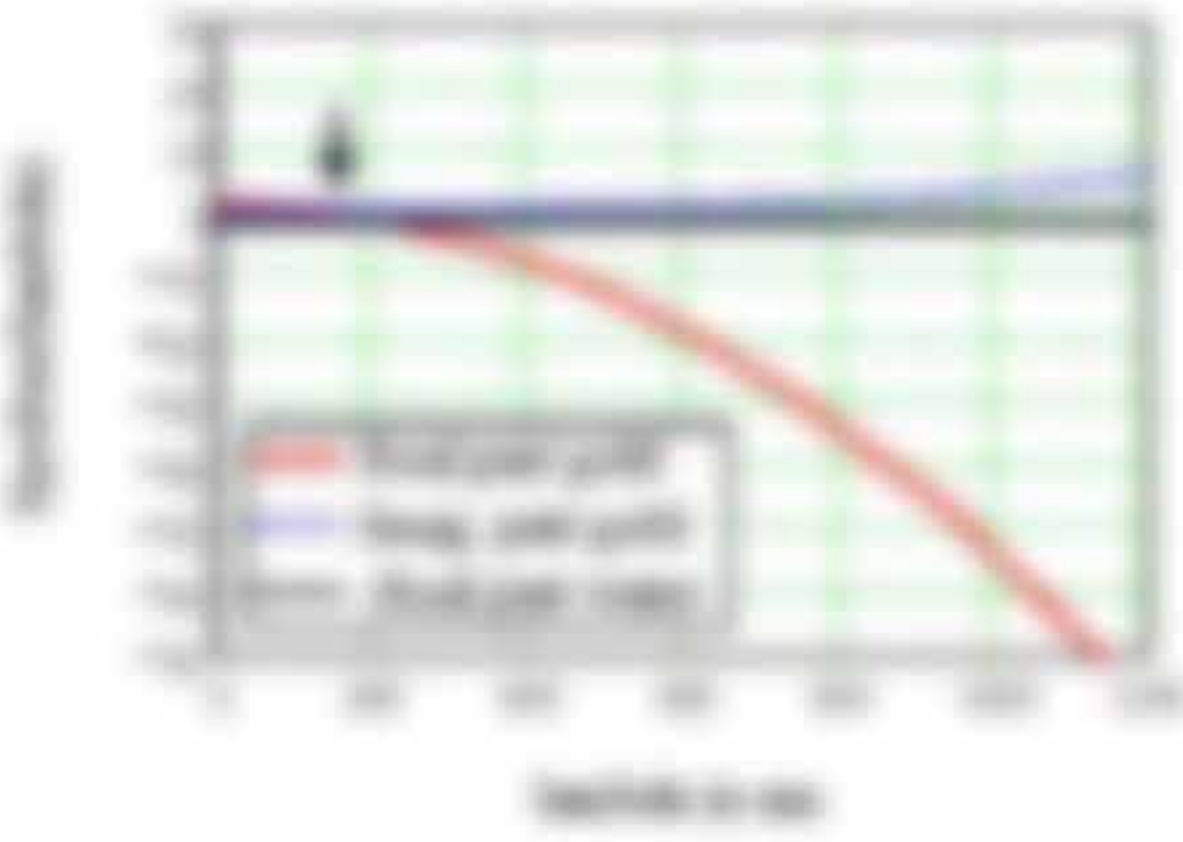
Somit ist die Permittivität für Leitungsplasmonen nach Drude-Lorentzmodell (DL)

$$\epsilon_{\text{DL}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} + \frac{\omega_{\text{L}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{L}}^2} \left(1 - \frac{\Gamma_{\text{L}}^2}{\omega^2 + \Gamma_{\text{L}}^2} \right) + \left(\frac{\Gamma_{\text{L}}^2}{\omega^2 + \Gamma_{\text{L}}^2} \right) \quad (6.10)$$

und für schwache Dämpfung $\Gamma \ll \omega_p$

$$\epsilon_{\text{DL}}(\omega) \approx \epsilon_{\text{DL}}(\omega_p) + i \frac{\omega_p^2 \Gamma}{\omega^3} \left(1 - \frac{\Gamma}{\omega} \right) + \left(1 - \frac{\Gamma}{\omega} \right) \quad (6.11)$$

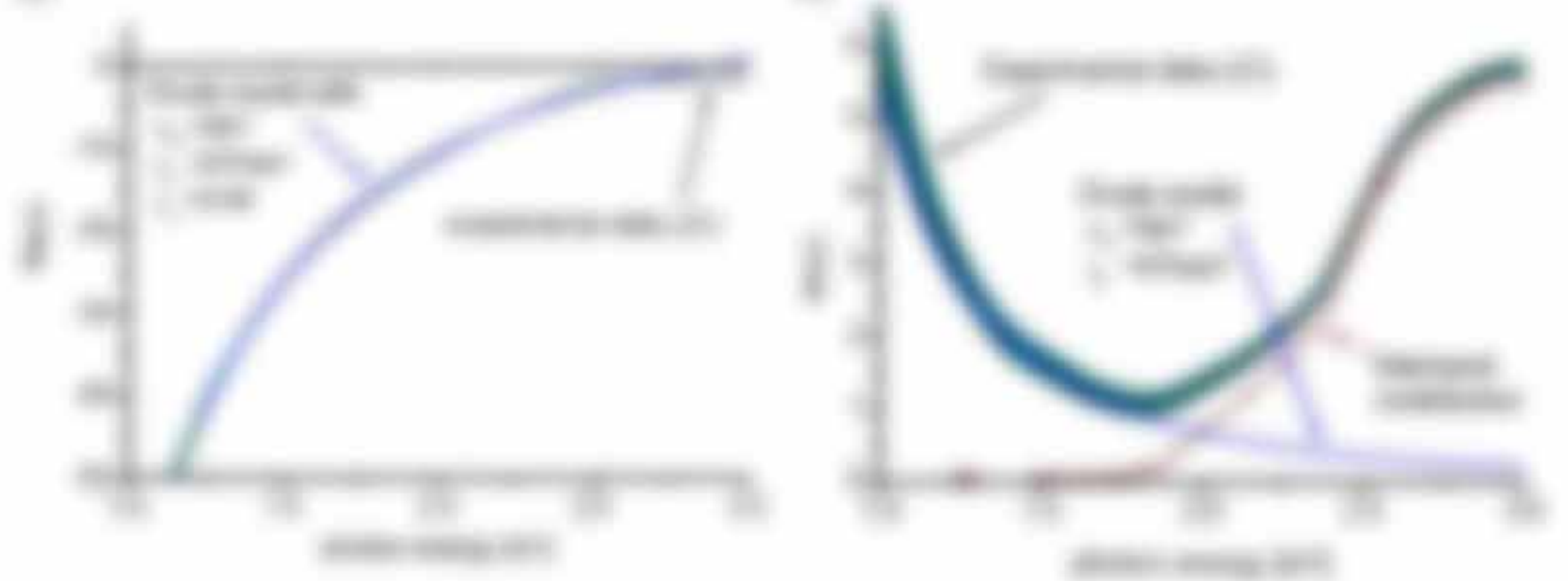
Beispiel: $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$.
 Die Dispersion $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_{UH}^2$ ist für $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ und $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen. Die Phasenkonstante $k = \omega/v_{ph}$ ist für $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen.



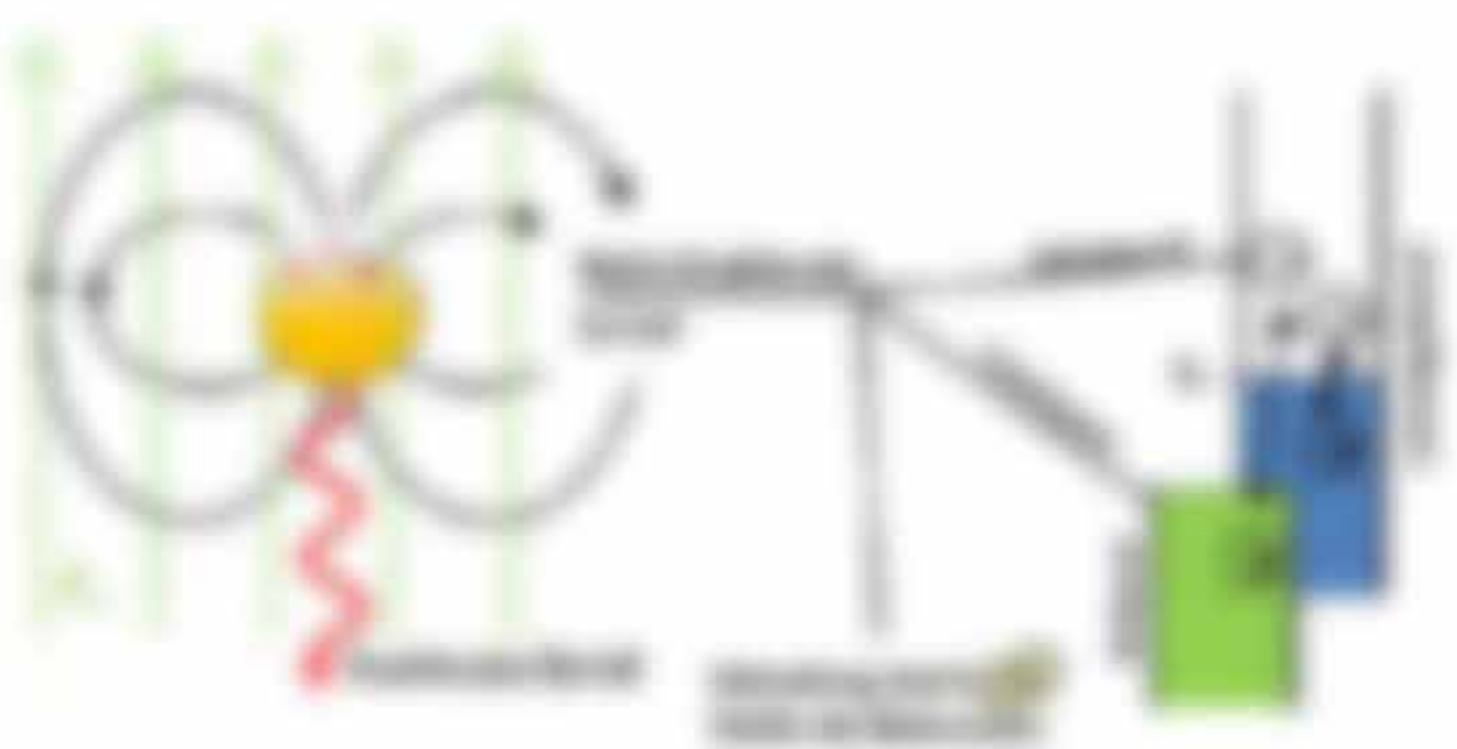
Die Dispersion $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_{UH}^2$ ist für $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ und $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen. Die Phasenkonstante $k = \omega/v_{ph}$ ist für $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen.

Modell der Hochfrequenzphysik

Das weitere Verfeinerung des Modells für die die Hochfrequenzphysik. Die für größere Frequenzen (z.B. die Frequenzen von Tetroden im Vakuumröhren) gelten werden können, sollte man die Eigenfrequenzen $\omega_p = \sqrt{Nq^2/m\epsilon_0}$ (siehe Kap. 12.10) auch berücksichtigen. Diese Hochfrequenzphysik (siehe Anhang für $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$) wird im folgenden hier nicht weiter betrachtet.



Die Dispersion $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_{UH}^2$ ist für $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ und $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen. Die Phasenkonstante $k = \omega/v_{ph}$ ist für $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen.

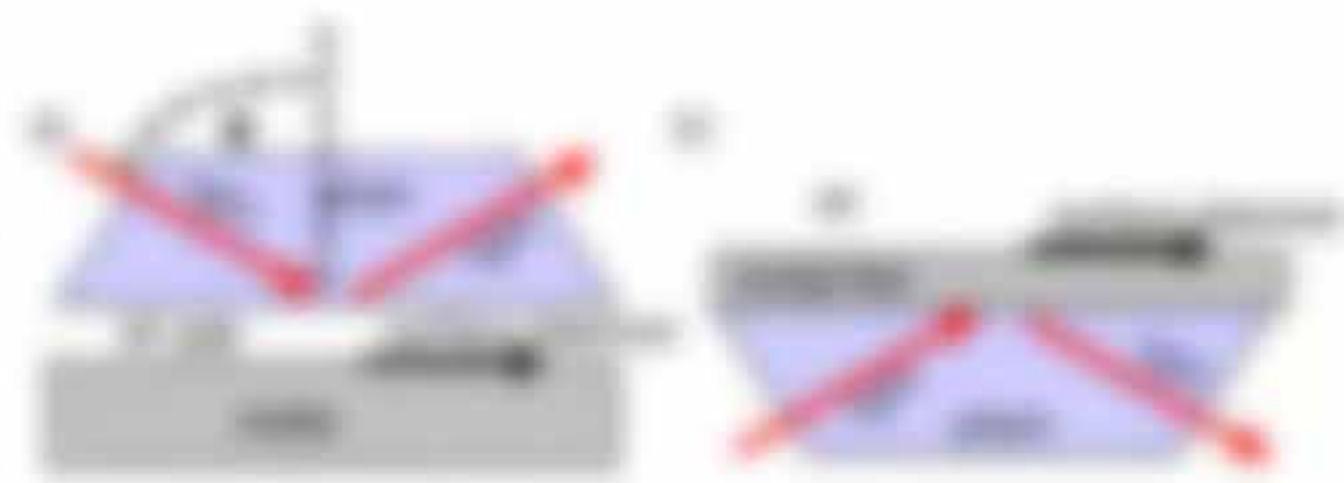


Die Dispersion $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_{UH}^2$ ist für $\omega_p = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ und $\omega_{UH} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen. Die Phasenkonstante $k = \omega/v_{ph}$ ist für $\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ zu berechnen.

Fig. 10 Die Amplitudenfunktion und ihre Ableitung beschreiben also die Änderung der Amplitude und damit die Energie des Lichts mit der Frequenz ω durch die Materialverluste beschreibt durch die Ausbreitung (Streu in Metallen) und durch die Dämpfung (groß in Metallen) des Lichts.

4.2.2 Oberflächenplasmonen

Plasmonen, die kollektive Schwingungen der Elektronenplasmas, können nur erzeugt werden, wenn Energie und Impulserhaltung gewährleistet sind. Wie sieht also die Abstrahlung bzw. Streuung (nach Brechfrequenz) und die Frequenz ω aus?



Abstrahlung mit Erzeugung von Oberflächenplasmonen bei unterschiedlichen Einfallswinkeln

Impuls- und Energieerhaltung für Oberflächenplasmonen

Fall Licht mit dem Impulsvektor $\mathbf{k}_i = \mathbf{p} / \hbar$ bei $\mathbf{k}_s = \mathbf{p} / \hbar$ und dem anderen Impuls

$$\mathbf{k}_r = \mathbf{p}_r / \hbar \quad (4.10)$$

mit Einfallswinkel θ_i in einem Dielektrikum mit Brechzahl n_1 auf eine Metalloberfläche, so werden Plasmonen zur Diffusion parallel zur Oberfläche erzeugt (surface plasmons), welche einen Impuls $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i$ haben. Die Diffusionen des Plasmas erzeugen ein sekundäres Licht mit Impuls \mathbf{k}_r , welche nach Oberflächenplasmonen-Frequenz nennt (surface plasmons polaritons, SPP).



Abstrahlung (SPP) der verschiedenen Diffusionen der Lichtstrahlen erzeugen ein sekundäres Licht bei der Plasmonenresonanzfrequenz (SPR), welche in einer Abstrahlung ist, wie in der Abstrahlung nicht abgestreut, wenn $\omega > \omega_{SPR}$ oder $\omega < \omega_{SPR}$ (Dissipation) abgestreut abstrahlt. Die SPR wird bei SPR Winkel mit θ_{SPR} genannt (Abstrahlung).

Impulserhaltung $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_r$ in den Richtungen k_x verbleibt und k_y parallel zur Grenzfläche mit einem dielektrischen Medium (n_1, n_2) erfordert Energie und differenzielle Felder E_{\parallel} und E_{\perp} in Metall und im Dielektrikum

$$E_{\parallel}(x,z,t) = E_{\parallel,0} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad E_{\perp}(x,z,t) = E_{\perp,0} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (4.11)$$

Wiederholen

(1) Bedingung (1) und (2) zur Grenzfläche: $E_{1y} = E_{2y}$ und $k_{1x} E_{1y} = k_{2x} E_{2y}$

(2) Differenzierbarkeit $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla_x D_x + \nabla_y D_y = \rho_{ext}$ und $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{ext} - \rho_{ext} = 0$
 wenn folgt, dass $k_{1y} E_{1y} = k_{2y} E_{2y} = 0$ und $k_{1x} E_{1x} = k_{2x} E_{2x} = 0$

(3) Wellenvektorkomponente $k_{1y} = k_{2y} = k_y = 0$, $k_x = k$

(1) und (2) sind erfüllt, wenn (1) $k_{1y} E_{1y} = k_{2y} E_{2y}$ oder wenn $k_y = 0$

Aus (1) und (2) folgt für die komplexen Wellenvektoren der Oberflächenplasmonen:

$$k_x = k_0 \sqrt{\epsilon_1} - i\gamma \sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{8.10}$$

$$k_x = k_0 \sqrt{\epsilon_1} - i\gamma \sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{8.10}$$

Mit $k_y = 0$ oder $k_y \neq 0$. In dem vorherigen Seminar zeigen, dass nur periodisches einfallendes Licht Oberflächenplasmonen (SPs) erzeugen kann!

Die Wirkung der Dispersionseigenheiten, Abklingen von Licht

Für propagierendes Licht ist die Dispersionseigenheit $n = c/v$ und zwar, dass beide die Wellen Frequenz ist proportional zur Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = c/n$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit)



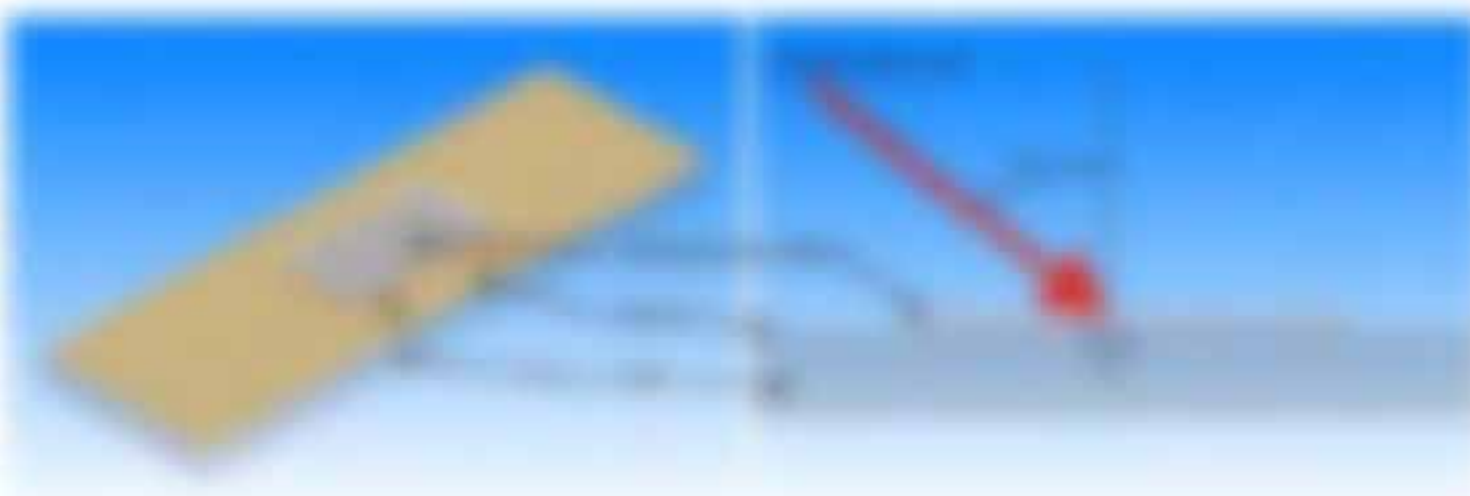
Dies ist anders bei Oberflächenwellen auf Metallen. Das Lichtwellenpaket muss die Wellenvektorkomponente k_x haben, damit der Input dieser Wellenmode über k_x über die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = c/n(\omega)$ weiter durch ab, d.h. das Licht wird abgebeugt. Wenn es der Input des einfallenden Lichts k_0 nicht hoch genug, um ein SP zu erzeugen. Man braucht daher einen Input über ein Gitter oder einen Nachschlagung λ_B über eine resonante Einkopplung (nach Otto), so dass der einfallende Wellenvektor mit der Wellenvektor des Gitters multipliziert bzw. verlagert wird (siehe Abbildung 10).

Kritischer Winkel nach Otto: Der kleinste Input des einfallenden Lichts k_0 muss gleich dem SP Input sein. Es gilt $k_x = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin(\theta) = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin(\theta_c) = \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Daraus ergibt sich der kritischer Winkel θ_c oder die minimale $k_{x,crit} = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin(\theta_c)$ über Otto:

$$\sin(\theta_c) = \sqrt{\epsilon_2} / \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{8.11}$$

Einkopplung über Otto

Einkopplung mit $k_x = \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ über Gitter. Der notwendige SP-Input kann auch durch Licht an einem (period.) Gitter mit



Perioden T_1 , die über höhere Dispersionen ω aufgenommen werden, haben entsprechend kürzere λ gilt:

$$v_{\text{Phasengeschwindigkeit}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.26)$$

Die Phasengeschwindigkeit v des Lichts als Abstrahlung von Licht nach λ (siehe Fig. 1.25) lässt sich besser ableiten, wie in der Dispersionen in Abbildung 1.26 zeigt. Hier hat die Fig. 1.25 nach ω auf und kann so über ein Diagramm über ω verschiedene Bereiche unterscheiden, je nach dem Verhältnis der Frequenz ω und λ (ω/λ):

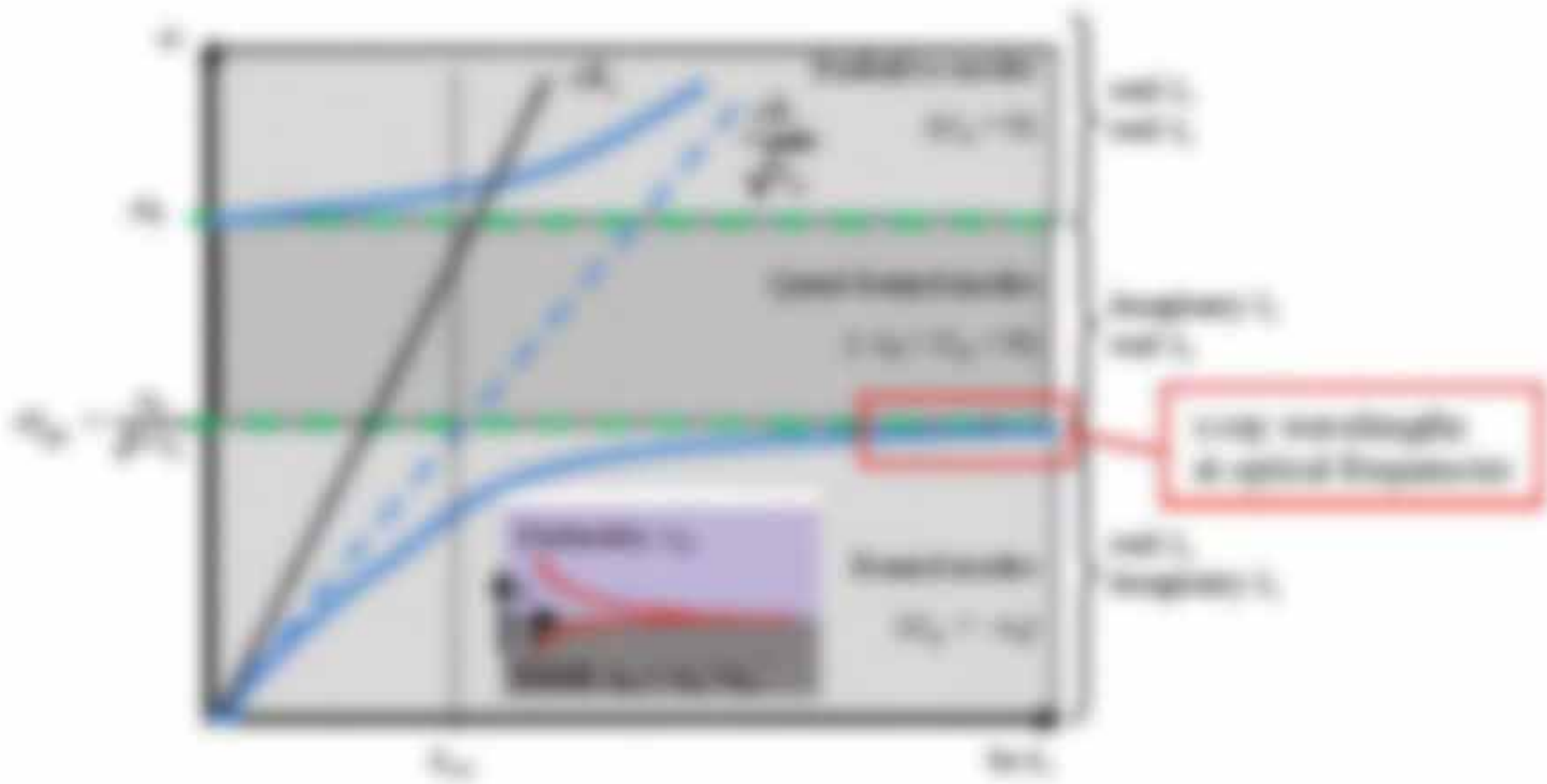


Abbildung 1.26: Dispersionen für die Fernwellen (Niederfrequenz) im Bereich der niedrigen Wellenlängen für die Oberflächenwellen. Die Kurve zeigt die Phasengeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ . Die Kurve zeigt die Phasengeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ . Die Kurve zeigt die Phasengeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ .

Für den Bereich hoher Wellenlängen, $\lambda \gg \lambda_D$, ergibt sich die optische Frequenz $\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon_0/\epsilon}$. In diesem Bereich verhalten sich die Oberflächenwellen wie gewöhnliche Wellen. Für niedrigere Frequenzen ($\omega < \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon_0/\epsilon}$) verhalten sich die Wellen wie die Fernwellen ω , die sich verhalten, wie in der vorherigen Abbildung des Lichts in die Oberflächenwellen. In diesem Bereich verhalten sich die Wellen wie die Fernwellen ω , die sich verhalten, wie in der vorherigen Abbildung des Lichts in die Oberflächenwellen. Die Phasengeschwindigkeit wird dann:

Phasengeschwindigkeit

Wellen mit kleinerm Frequenz ω , sind besser getriggert und laufen in Richtung der von der Oberfläche der Oberfläche entlang. Die Phase ω ω und über die Frequenz ω , zeigen sich Änderungen von ω ω nach getriggert.

Die Phase ω des ω ist in Phasengleichrichtung exponenziell ab, so dass sich eine Phasengleichrichtung ω entlang der Oberfläche ergibt.

$$E_x(z) = E_0 e^{-\alpha z} \exp(i(kx - \omega t)) \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \epsilon_0 \mu_0} \quad (1.27)$$

mit Längen von $\lambda = 400\text{nm}$ für Silber und $\lambda = 330\text{nm}$ für Gold bei $\lambda = 400\text{nm}$.

Die Erdringweite λ in der Metallschicht ist kleiner als die Wellenlänge im Vakuum λ_0 :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad \text{mit} \quad \epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) - \frac{f_p^2}{\omega^2 - \gamma^2} \quad (8.20)$$

mit 120-fachen von $\lambda_{Au} = 200\text{nm}$ bzw. $\lambda_{Ag} = 400\text{nm}$ für Silber und $\lambda = 200\text{nm}$ bzw. 330nm für Gold bei $\lambda = 400\text{nm}$.



128 mit kurzen Wellenlängen lässt sich auf kleineren Raum begrenzen

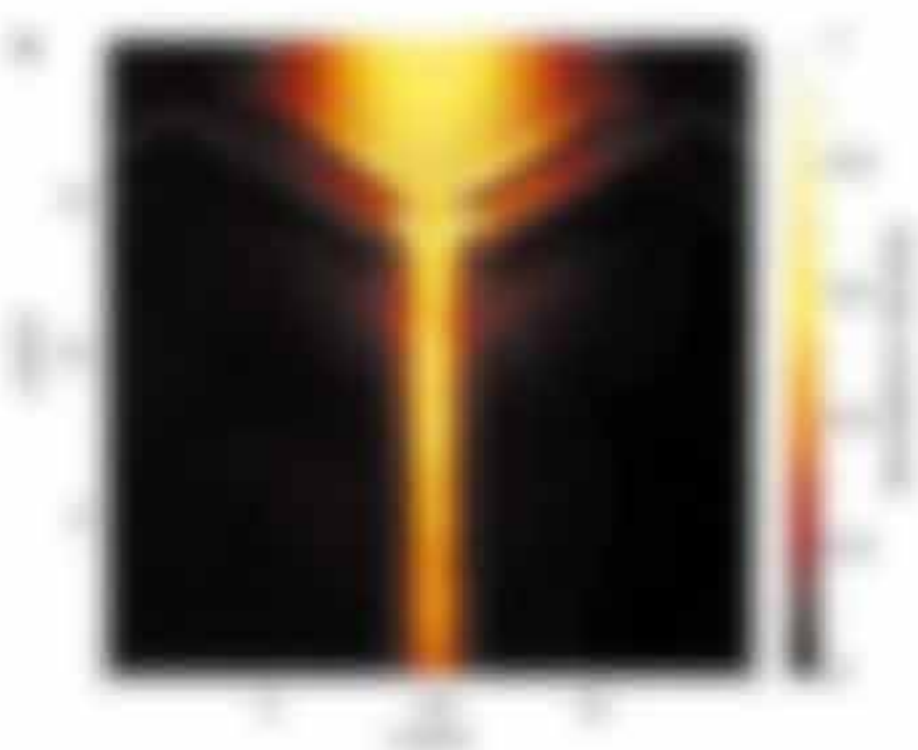
Die Wellenlänge einer SPP entlang der Oberfläche ergibt sich zu

$$\lambda_{SPP} = \frac{2\pi}{k_{SPP}} = \frac{2\pi}{k_0 \sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (8.21)$$

Es ist beispielsweise für Gold $\lambda_{SPP} = 200\text{nm}$ bei existierendem Licht mit 400nm und $\lambda_{SPP} = 330\text{nm}$ bei existierendem Licht mit 400nm .

Wicht: Durch die Erzeugung hoher SPP-Raumfrequenzen k_{SPP} bei existierendem Licht, lässt sich Licht so auf sehr kleine Räume begrenzen $\lambda \ll \lambda_0$ ($\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon(\omega)}$)

Messung von SPPs



Oberflächenplasmonenresonanzen lassen sich durch eine kleine Winkel-SP-Licht einer Metall-Schicht (Metall) oder durch Licht-Strahlen (Metall) detektieren und messen.

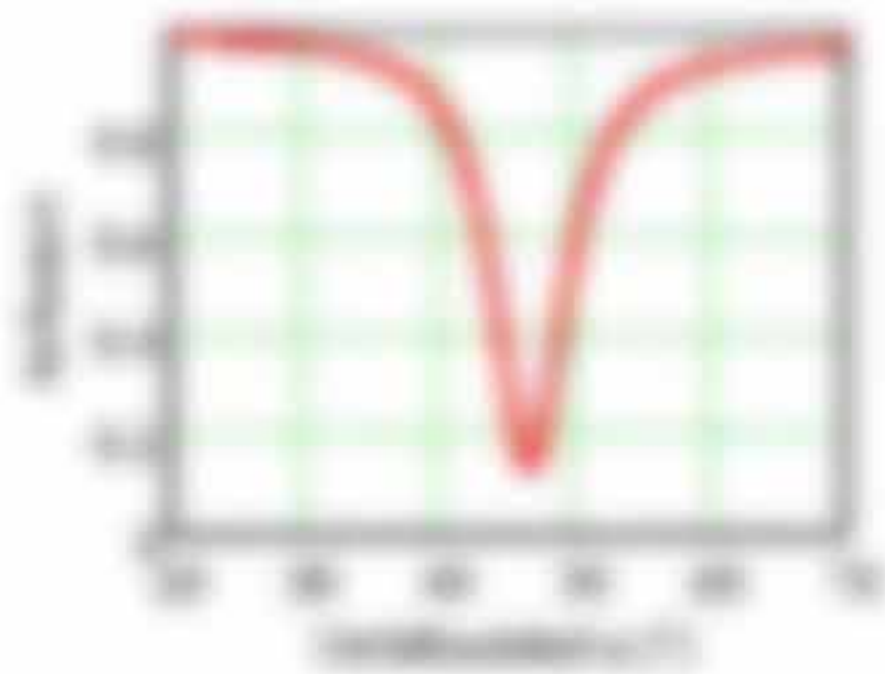
Messung von SP in einem Wellenleiter an einer Grenzfläche mit einem Winkel von 20° zur Normalen. Schematische Darstellung der SPP-Wellenlänge λ_{SPP} und der Wellenlänge im Vakuum λ_0 .



Messung von SP in einem Wellenleiter an einer Grenzfläche mit einem Winkel von 20° zur Normalen. Schematische Darstellung der SPP-Wellenlänge λ_{SPP} und der Wellenlänge im Vakuum λ_0 .

Wirkung der Reflexion bei Oberflächenplasmonenmessungen (siehe Kapitel 4.4): Die Reflexion an einer Metalloberfläche verschiebt den Detektor nicht um

$$\Delta z = \left| \frac{\partial R}{\partial k} \right| = \left| \frac{\partial \left(\frac{R_1 + R_2}{1 + R_1 R_2} \right)}{\partial k} \right| = \frac{2R_1 R_2 \Delta k}{|1 - R_1 - R_2| |1 - R_1 R_2|} \quad (4.20)$$

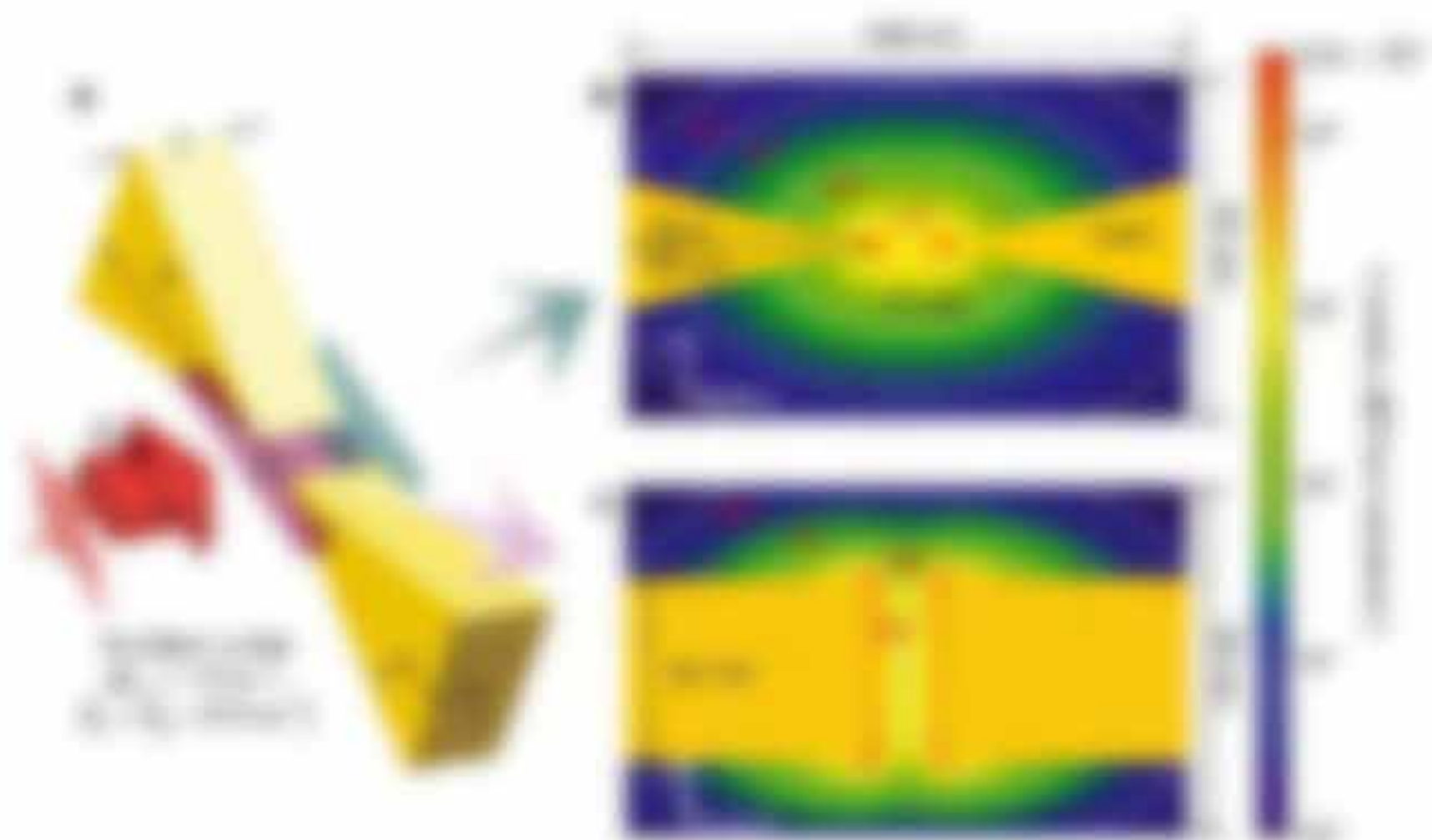


Wieder um Δz , der Reflexionskoeffizient der Metall, R_1 , der Reflexionskoeffizient des Detektors und Δk die Breite der Metalloberfläche (R_2 und Γ) sind Korrekturfaktoren bei Frequenzänderung. Die Ableitung auf der rechten Seite wird hier nicht dargestellt.

Wichtig: Die Verschiebung der Reflexion an einem Winkel von $\Delta k = 10^\circ$ durch diese Struktur des Detektors ist um ein Vielfaches die Verschiebung an einer glatten Metalloberfläche, z.B. einer Metalloberfläche $\sim 100 \text{ nm}$.

Wichtig: Neben der Inputleistung über Δ kommt es durch die Resonanz zu einer starken Energie-Erhaltung bzw. Fokussierung an der Metalloberfläche. Die Lichtintensität kann dort bis auf das 100-fache ansteigen! (S.M. Yeh, Nature 455, 707 (2008))

Wichtig: Die Wellenlänge der Lichtstrahlung ist ein wichtiger Parameter, um die Wellenlänge der Oberflächenplasmonen zu bestimmen. Die Wellenlänge der Lichtstrahlung ist ein wichtiger Parameter, um die Wellenlänge der Oberflächenplasmonen zu bestimmen.



Anwendungen in der Nano-Optik

- Erzeugen Nano-Wellenleiter (z.B. für integrierte Wellenleiter)
- Fokussierung durch Strukturparameter
- Magnetooptische Datenverarbeitung
- Nano-Antennen und -Resonatoren
- Sensoren einzelner Moleküle (z.B. mit SPR oder SPR-Spektroskopie)
- SP-Beschichten

6.2.3. Fernstudien

Bei unterschieden werden die besonderen Strom- und Stromverlaufseigenschaften von verschiedenen Stromarten untersucht, um die verschiedenen Fernstudien zu verstehen (z.B. Stromverlaufseigenschaften, „Stromverlauf“). Damit wurde man allerdings noch nicht mit den großtechnischen Stromverlaufseigenschaften der Fernstudien.

Wie funktioniert das?

Dieses wie bei den Fernstudien werden bei kleinen Stromverlaufseigenschaften die unterschiedlichen Stromverlaufseigenschaften von Fernstudien untersucht und die Ergebnisse genutzt. Das geschieht nur mit Stromverlaufseigenschaften der Fernstudien (z.B. Stromverlaufseigenschaften).

Die Stromverlaufseigenschaften der Fernstudien sind, dass diese Stromverlaufseigenschaften die unterschiedlichen Stromverlaufseigenschaften sind und diese größer ist die bei der Fernstudien untersuchte Stromverlaufseigenschaften (z.B. Stromverlaufseigenschaften) und die Stromverlaufseigenschaften sind die Stromverlaufseigenschaften (z.B. Stromverlaufseigenschaften). Das resultiert dann in einer höheren Stromverlaufseigenschaften.

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6.20)$$

Die Stromverlaufseigenschaften der Fernstudien sind die Stromverlaufseigenschaften (z.B. Stromverlaufseigenschaften) und die Stromverlaufseigenschaften sind die Stromverlaufseigenschaften (z.B. Stromverlaufseigenschaften). Das resultiert dann in einer höheren Stromverlaufseigenschaften.



Das Diagramm zeigt die Stromverlaufseigenschaften der Fernstudien. Es zeigt eine gelbe kreisförmige Anzeige mit einem vertikalen Pfeil, der nach unten zeigt, und eine Skala mit vertikalen Linien.

Wie bei den anderen Stromarten, so die Stromverlaufseigenschaften durch die unterschiedlichen Stromverlaufseigenschaften bestimmt. So auch bei kleinen Stromverlaufseigenschaften, welche bei I_{eff} durch Stromverlaufseigenschaften. Bei größeren Stromverlaufseigenschaften (z.B. Stromverlaufseigenschaften) bestimmt die Stromverlaufseigenschaften bei I_{eff} die Fernstudien. Als Maß für die Stromverlaufseigenschaften wird die Stromverlaufseigenschaften I_{eff} , welche hier über die relative Stromverlaufseigenschaften $I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} / I_{\text{eff}}$ angegeben wird.

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6.21)$$

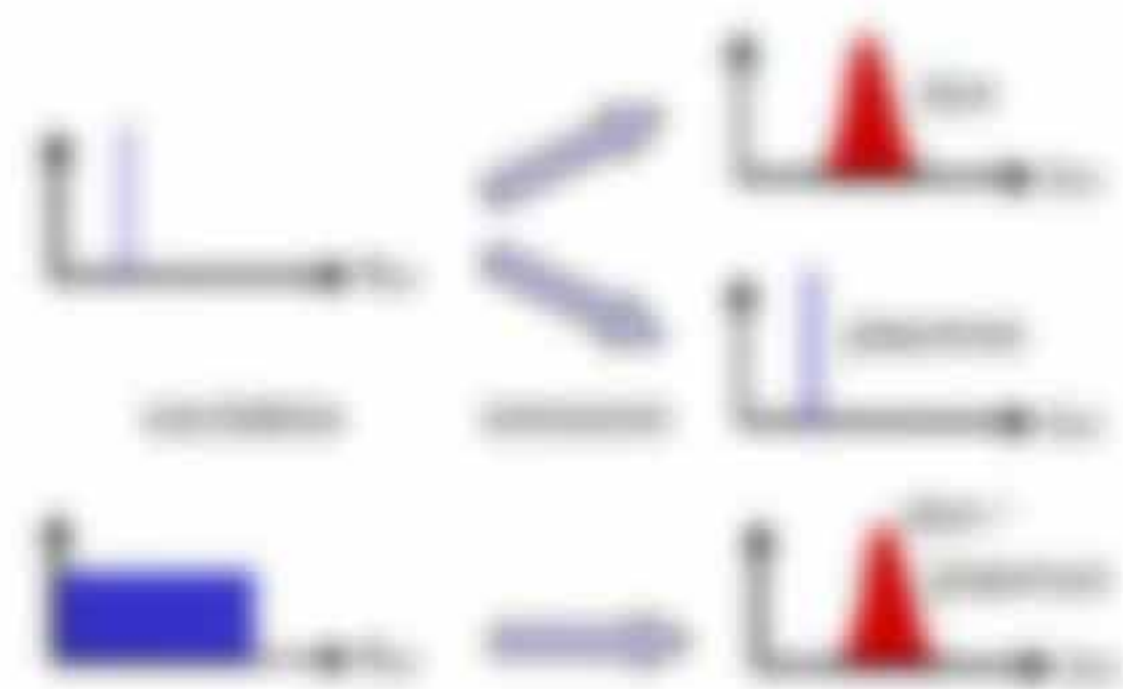
Dieses ergibt sich analog zu Gleichung (6.20) und (6.21) der Strom- und Stromverlaufseigenschaften, welche hier nur für Stromverlaufseigenschaften ($I = I_{\text{eff}}$) gezeigt wird.

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6.22)$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6.23)$$

Eq. 8.26 sagt, dass ρ sehr groß wird, wenn der Nenner $\rho + 2$ sehr klein wird.

Die Werte des gemessenen ρ (ρ_{gem}) = $\rho + 2$ (ρ_{gem} weist nun anfallender ρ (ρ) ist wieder durch den Bruchzähler $\rho_{\text{gem}} = \rho + 2$ bzw. die Bruchfunktion ρ_{gem} bestimmt. Ähnlich wie in Eq. (7.26), kann man über die aufgenommene Energie $-Q_{\text{Licht}}$ mit einer Querschnittsfläche A_{Licht} :

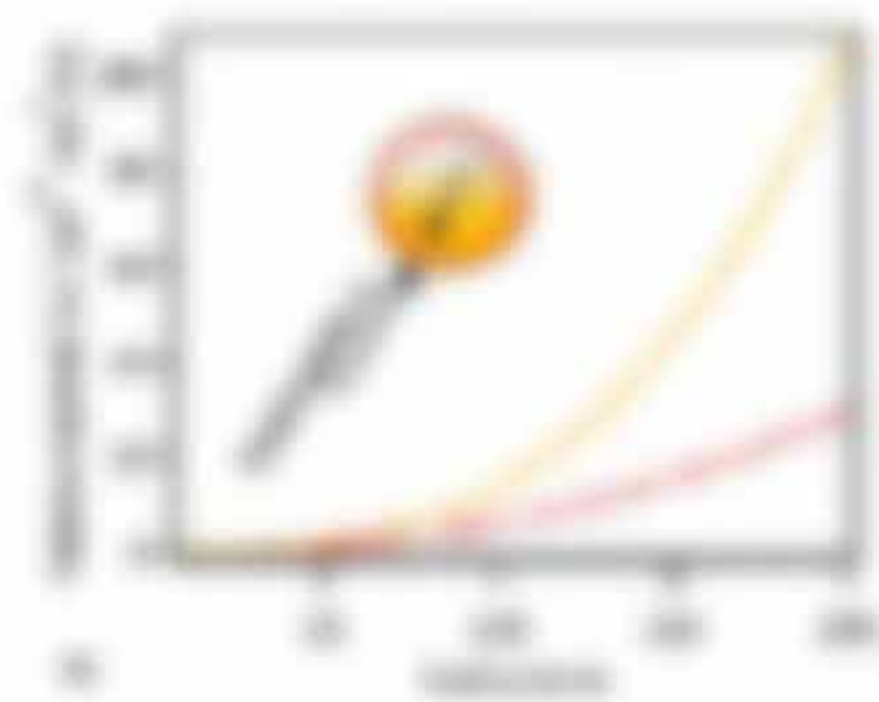
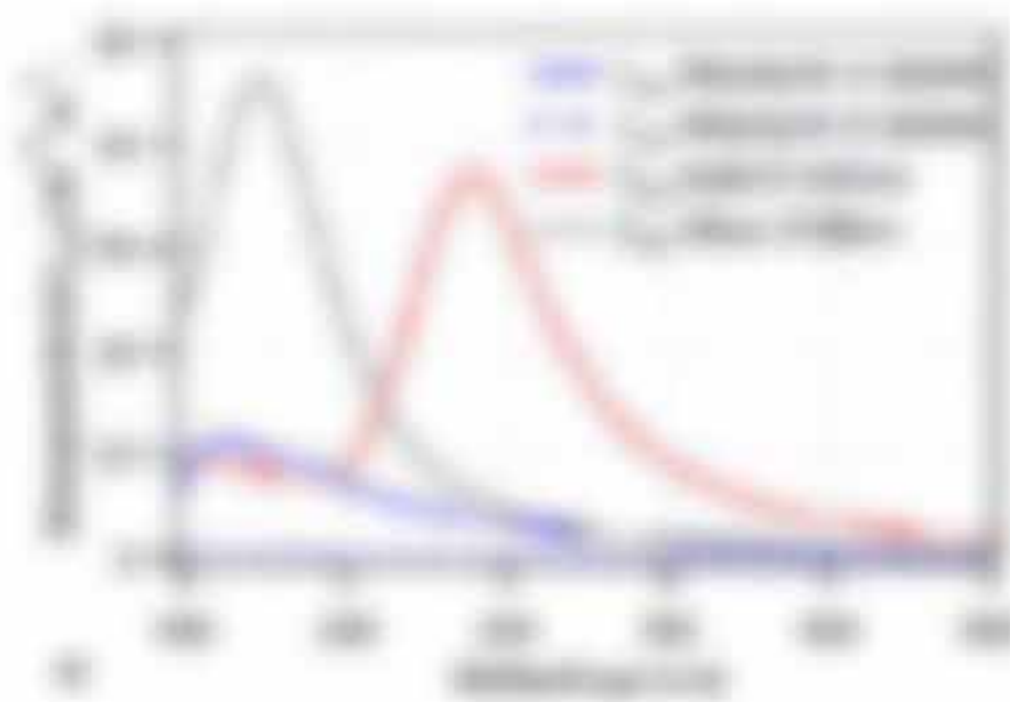


BEWEISUNG 8.27

Der absolute Anteil $\rho_{\text{abs}} = \rho_{\text{abs}} - \rho_{\text{abs}}$ kommt durch beide der Parameter mit der Steilheit (Photosyn.) und flach in Richtung (Photorespiration). Man spricht von **Depression**, unabhängig fließt dies in ungerichteter Formierung.

Steigung der Kurve in Form von ρ_{abs} ist flach, da es nicht in der Lage ist, eine Veränderung der Leistung zu bewirken. Unabhängig davon ist ρ_{abs} flach.

Depression, unabhängig fließt dies in ungerichteter Formierung.



Steigung ist ein kleiner Bruchteil des Wertes, aber die Photosynthese ist flacher und steiler als ρ_{abs} ist und eine große Abkühlung im negativen ρ_{abs} .

Da die Absolutrate von Photorespiration nicht, so muss die geringe Endrate ρ_{abs} der Licht im Metall berücksichtigt werden. Da diese nur wenig ist, man kann bei $\rho_{\text{abs}} \approx \rho_{\text{abs}}$ eine Näherungswert der Form:

$$\rho_{\text{abs}} \approx \rho_{\text{abs}} - \rho_{\text{abs}} \quad (8.28)$$

eingesetzt werden, welche dem Verhältnis $\rho_{\text{abs}} = \rho_{\text{abs}}$ in der Regel Rechnung trägt.

Bestimmte Formeln zeigen je nach Anzahl ihrer verschiedenen langen Achsen verschiedene Neuanordnungen. Es sind ρ_{abs} bei ρ_{abs} die Leistungen entlang der kurzen vertikalen Achse zusammen als bei der langen und haben eine weitere Neuanordnung bzw. kurze Neuanordnungen (zwei Anordnungen). Es können also mehrere Punkte in Neuanordnungen auftreten.



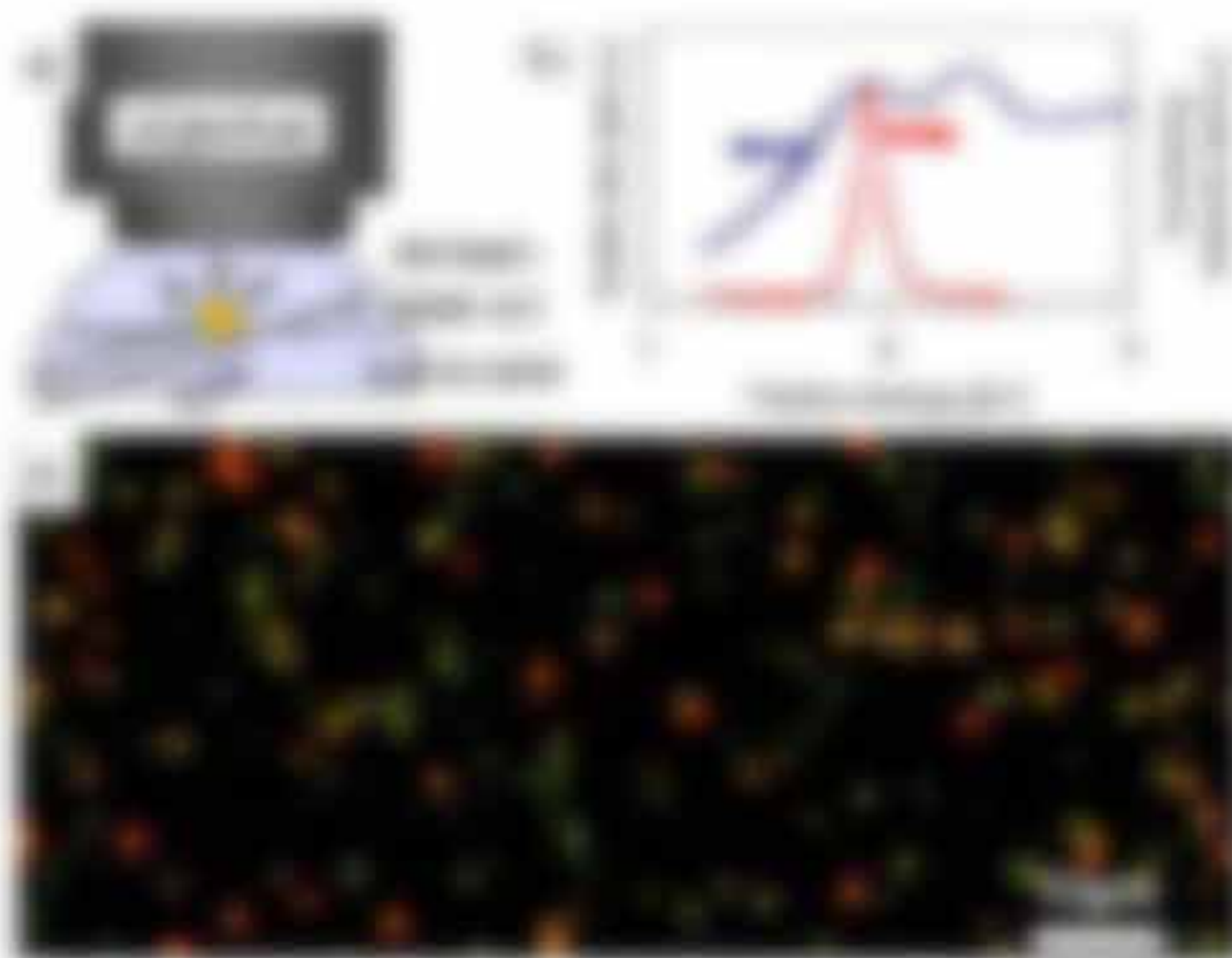
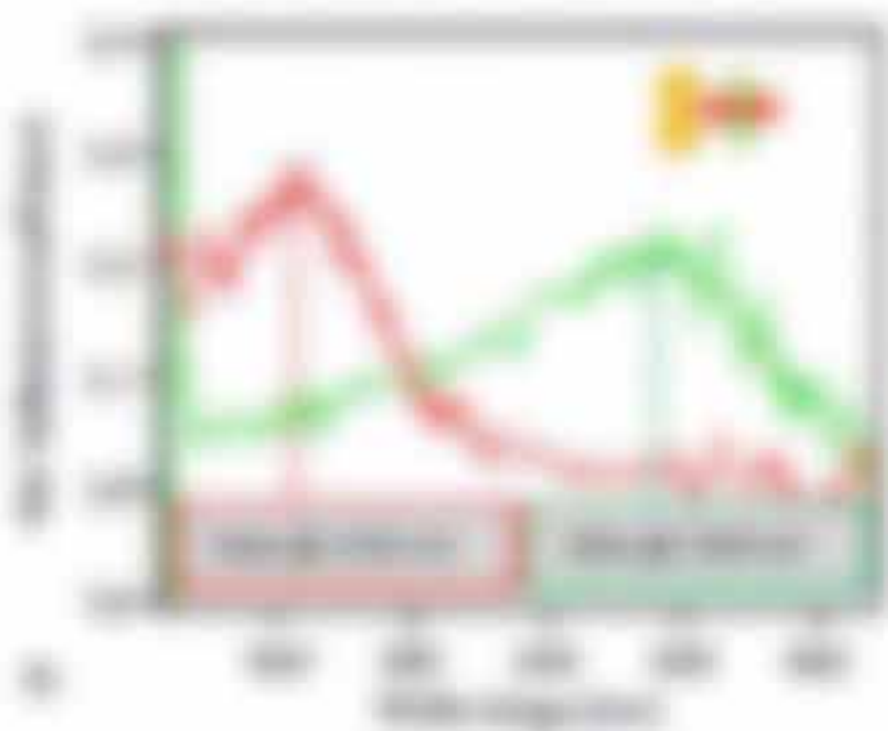


Abbildung 10: (a) Prinzip der Oberflächenplasmonen durch ungerade Brechung an der Grenzfläche Luft/Film. (b) Dip in der Reflektivität bei der Resonanzfrequenz. (c) Mikrograph einer Oberfläche mit kleinen Partikeln.

Fluoreszenz-Ablesung

Entsprechend dem Prinzip der



verringerten Abtasttiefe, lässt sich optischdetektiv untersuchen, ob das molekulare Nanosystem (Fluor) sich binden und plasmonisch koppeln, d.h. ein Dipol bilden. Somit zur Dimensionierung der Abtasttiefe kann, parallel dazu, ob sie lang und die Spektrum verschoben sind im Falle.

Abbildung 11: Fluoreszenz-Ablesung eines Nanosystems mit einer veränderten Größe. Verschiebung des Spektrums bei unterschiedlichen Bedingungen.

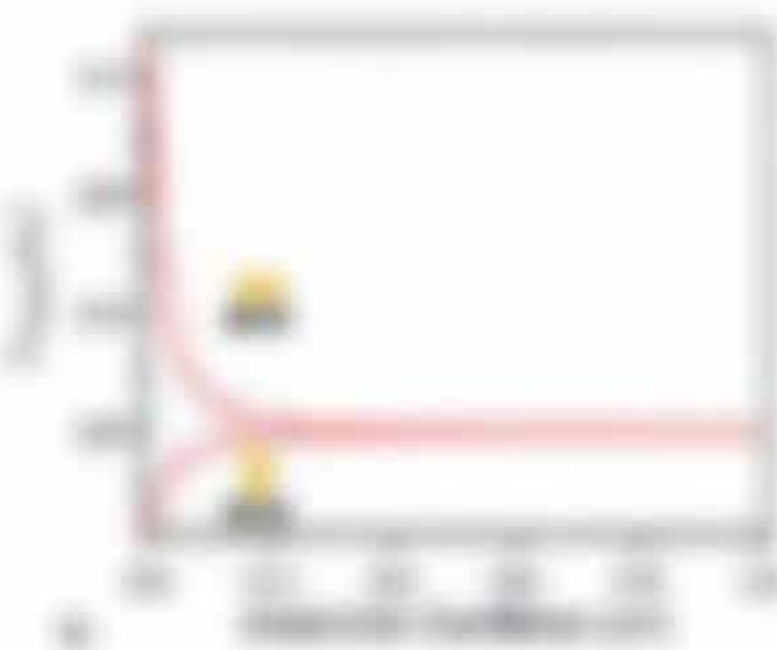
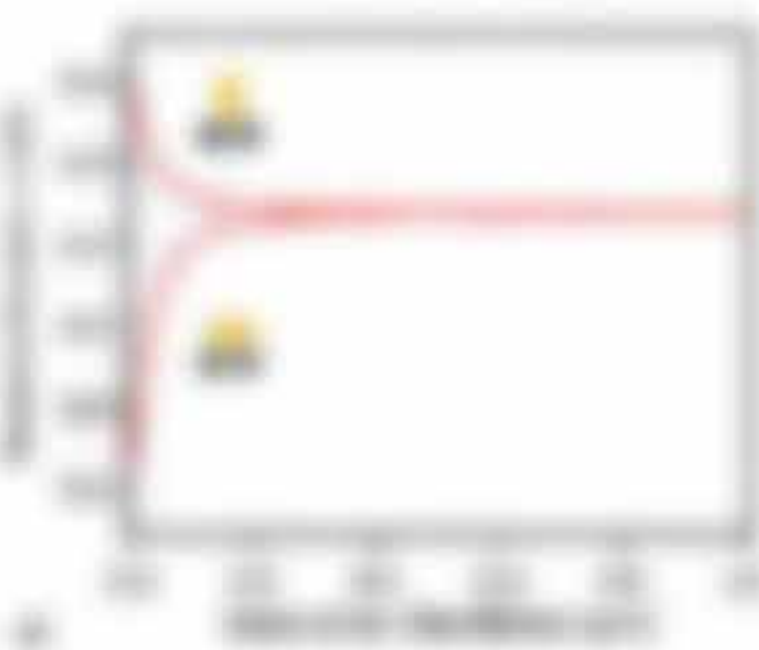


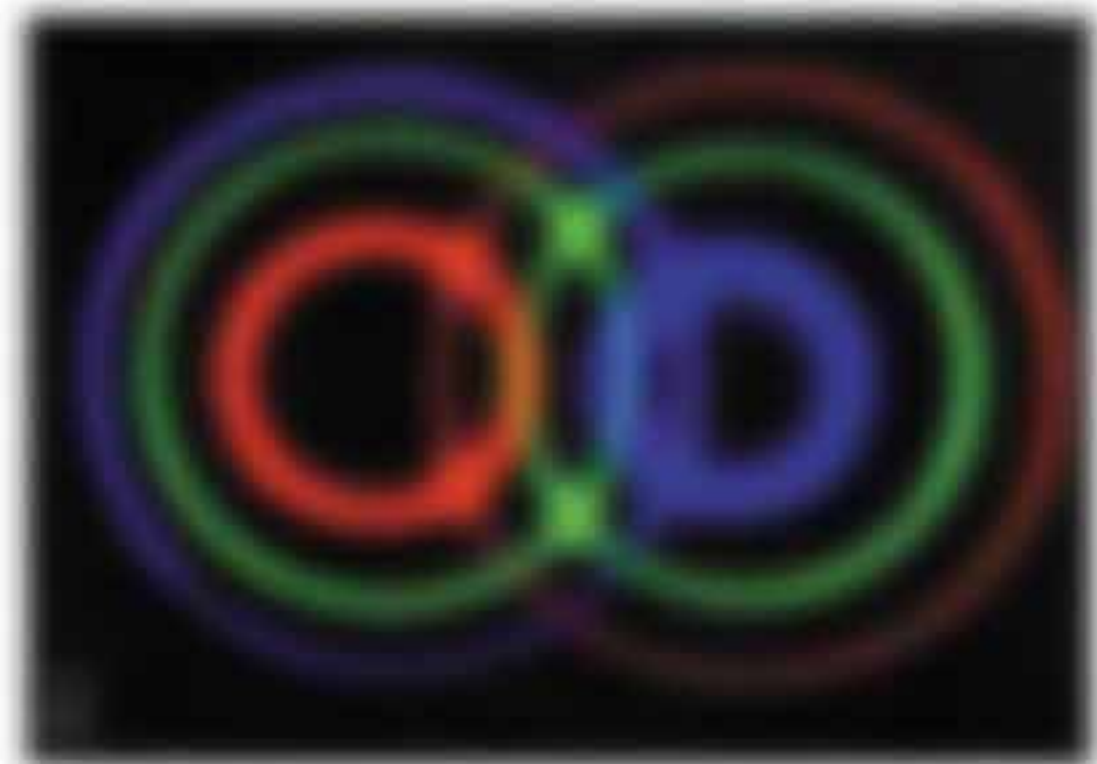
Abbildung 12: Verschiebung des Spektrums bei unterschiedlichen Bedingungen. (a) Fluoreszenz-Ablesung eines Nanosystems mit einer veränderten Größe. (b) Fluoreszenz-Ablesung eines Nanosystems mit einer veränderten Größe.

Anwendungen von Fortfortplasmonen

- Einsatz als Signalverstärker (SERS, Fluoreszenz, ...)
- Einsatz als Sensor mit großer Streuquerschnitt
- Als Resonanzsensor bei molekularen Anlagerungen
- Als Baustein für funktionale Nanosysteme (mit steuerbaren Eigenschaften)

6.3. Nonlineare Optik

Die nonlineare Optik beschreibt alle Phänomene, bei denen physikalische Parameter nonlinear von magnetischen Feld \vec{H} oder vom elektrischen Feld \vec{E} abhängen. Interessant wurde dies erst ab Einführung des Lasers, wo es sich bei der Intensität $I = |\vec{E}|^2 \propto |\vec{H}|^2$ um eine Feldstärke $E = \sqrt{2I/c}$ handelt. (Durchschnittsleistung der Licht)



Das ist ein Bild aus einer Nonlinearen Optik, das die Überlagerung zweier Wellen zeigt, die sich aufgrund der Interaktion voneinander beeinflussen.

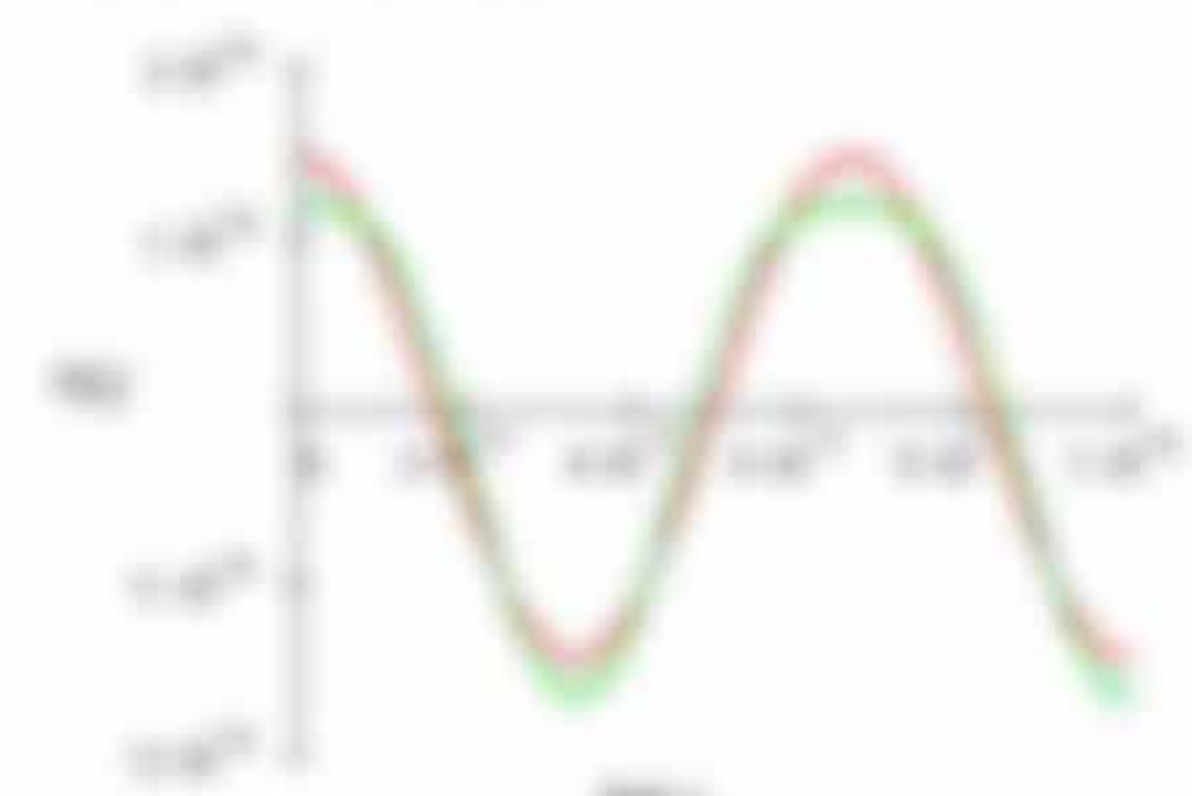
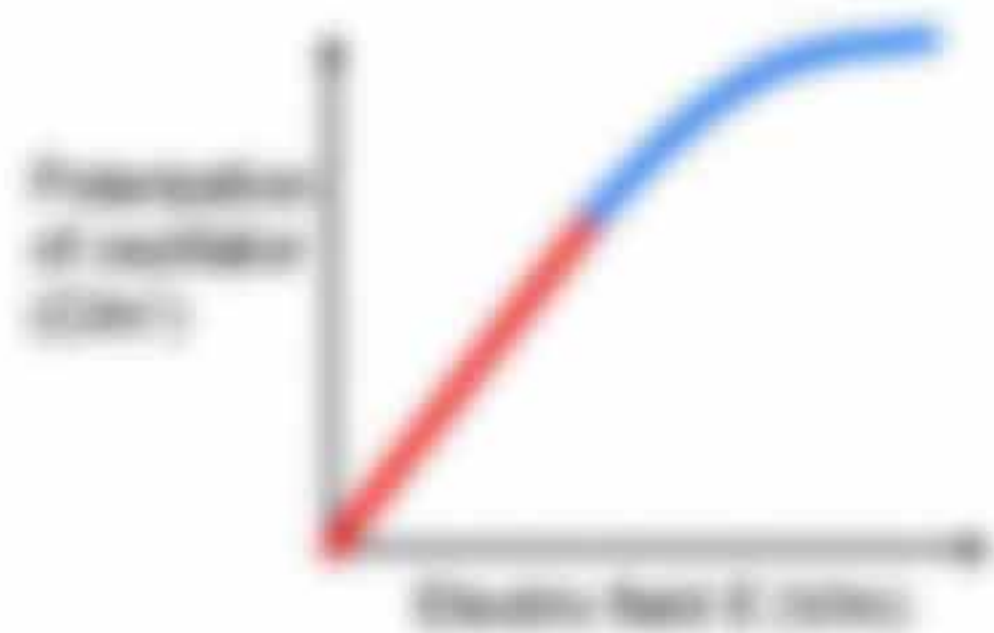
Die Polarisation \vec{P} eines Mediums oder Moleküls in Materie als Antwort auf eine Bestrahlung mit einem Feld $\vec{E}(t)$ ist beschrieben durch die elektrische Suszeptibilität $\chi^{(n)}$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi^{(2)} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t)^3 + \dots \right) \quad (6.30)$$

Man versteht auch Feldstärke mit der Einheit $[E] = \sqrt{I/c}$, $[H] = \sqrt{I/c}$

Lineare Optik: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$
 wobei $\chi^{(1)} = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi^{(3)} + \dots$ die n -te Ordnung von \vec{P}

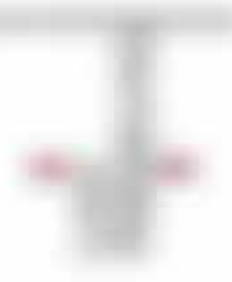
Nonlineare Optik: $\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi^{(3)} + \dots)$ (6.31)



Bestimmung ist über die Struktur der Moleküle (symmetrisch u. asymmetrisch) oder über die Anordnung der Moleküle im Material (Kristalle) möglich. Nichtlineare Optik ist ein Bereich der Optik, der sich mit der Ausbreitung von Licht in Medien beschäftigt, die eine nichtlineare Suszeptibilität besitzen.

Im dielektrischen Medium, so werden die $\chi^{(n)}$ schnell zu Tensoren höherer Stufe. Im isotropen Fall ergibt sich umgekehrt eine Abhängigkeit des Brechungsindex $n = n_0 + n_2 I + n_4 I^2 + \dots$ entsprechend (siehe S. 100 in Übung).

$$n(I) = n_0 + n_2 I + n_4 I^2 + n_6 I^3 + \dots \quad (6.32)$$



An der einfachen Erzwungung des Pendels $\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi + \omega_0^2 \varphi_{\text{ext}} \cos(\omega t)$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \varphi_{\text{ext}} \cos(\omega t) \quad (8.20)$$

sieht man, dass die Masse oder Federhaken nun nicht nur mit der Frequenz ω schwingt (Resonanz-Erzwungung), sondern auch erzwungene Eigen-Resonanz-Erzwungung mit höheren harmonischen Frequenzen $n \cdot \omega$. Die Amplitude dieser Schwingungen ist durch die Masse m bestimmt, welche verschieden erzwungene $\varphi_{\text{ext}}^{(n)}$ erfahren kann.

Erzwungene Schwingung

Erzwungene Schwingung für lineare und nichtlineare Erzwungung entsprechend (8.17)

Die an System geübte Erzwungung φ_{ext} ist proportional zum Quadrat des getriebenen harmonischen $\varphi_{\text{ext}} = \varphi_{\text{ext}}^{(1)} + \varphi_{\text{ext}}^{(2)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\text{ext}}^{(n)}$, welches proportional zur Formanten $F = \omega_n \cdot (\varphi_{\text{ext}}^{(1)} + \varphi_{\text{ext}}^{(2)} + \dots)$ bzw. zu $\varphi = \omega^2 \varphi_{\text{ext}}$ Formantenfaktor, $F = \text{Erzwungungsfaktor}$ ist, lautet gilt

$$\varphi_{\text{ext}} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\text{ext}}^{(n)} = \frac{1}{\omega_n^2} \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 = \frac{1}{\omega_n^2} \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \quad (8.21)$$

Wobei $\varphi_{\text{ext}} = \varphi_{\text{ext}}^{(n)}$ die erzwungene Erzwungung des erzwungenen Systems und ω_n gilt

$$\varphi_{\text{ext}}^{(n)} = \frac{1}{\omega_n^2} \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 \quad (8.22)$$

8.2.1. Erzeugung der zweiten harmonischen, Frequenzverdopplung

Second harmonic generation (SHG) ist ein Frequenz-Effekt 2. Ordnung (SH $\omega^2 = 2\omega$) und wurde (SH) erstmalig gezeigt durch P. Franken (PH, TH, SHG)

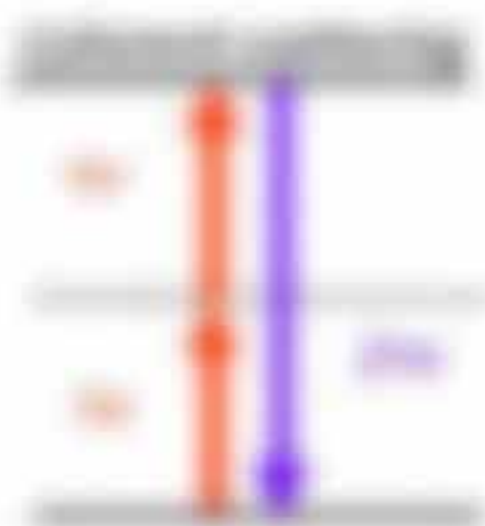
Erzeugung der Formanten bei der 2. Ordnung für ein harmonisches System führt auf

$$F_{\text{ext}} = \omega_n \cdot \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \omega_n^2 = \omega_n^2 \varphi_{\text{ext}}^{(n)} = \omega_n^2 \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 = \omega_n^2 \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 = \omega_n^2 \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2$$

oder $F_{\text{ext}} = \omega_n^2 \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 = \frac{1}{\omega_n^2} \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2 = \varphi_{\text{ext}}^{(n)} \cdot \omega_n^2$ (8.23)

Die Frequenz erzwungener Erzwungungen hat sich zu 2ω bzw. 2ω verdoppelt, die Amplitude ist entsprechend $\varphi_{\text{ext}} = \varphi_{\text{ext}}^{(n)}$ F erzwung, wobei $\varphi_{\text{ext}} = \varphi_{\text{ext}}^{(n)}$ gilt

SHG-Erzeugung: Treffen zwei langwellige Photonen der Energie $h\nu$ auf einen nichtlinearen, erzwungenen Kristall, so kann aus ihnen ein kurzwelliges Photon mit der Energie $2h\nu$ entstehen (Energieerhaltung).



Die Wellenlänge für dieses Photon ist $\lambda_{\text{ext}} = \lambda_{\text{ext}}^{(n)}$.

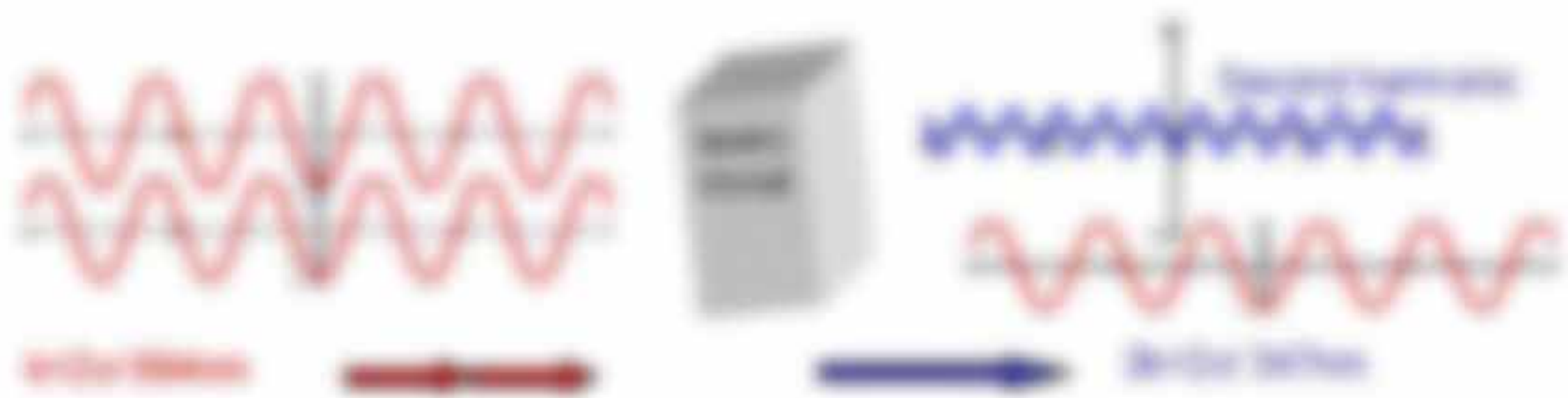


Abbildung 10.1: Reflexion und Brechung von Wellen an einer Grenzfläche

Problem: Es entsteht eine starke Dispersion wegen unterschiedlicher Brechungsindizes $n(\omega)$ \rightarrow $n(\omega) = c/v(\omega)$. Nach der kurzen Wegstrecke in Schichtdifferenz $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ (Schichtdicke Δz_1 und Δz_2) sind diese Phasen in Verschiebung unter $\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2$ (siehe auch Abb. 10.2) und diese Phasen in Verschiebung unter $\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2$ (siehe auch Abb. 10.2) sind Lösung ist ein dispersiver Wellenpaket, bei dem $\omega(\Delta z) = \omega_0(\Delta z)$. Die häufig verwendete Formel ist $\omega(\Delta z) = \omega_0(\Delta z) + \frac{1}{2} \omega''(\Delta z) \Delta z^2$.

Dispersionstheorie (siehe zur Phasengeschwindigkeit $v(\omega) = \omega/k(\omega)$ siehe auch Abb. 10.2)

Diese Bedingung ist für genau eine Frequenzkombination ω und k erfüllt, was für die Propagation von Frequenzgruppen (siehe auch Abb. 10.2) $\omega = \omega_0(\Delta z)$.

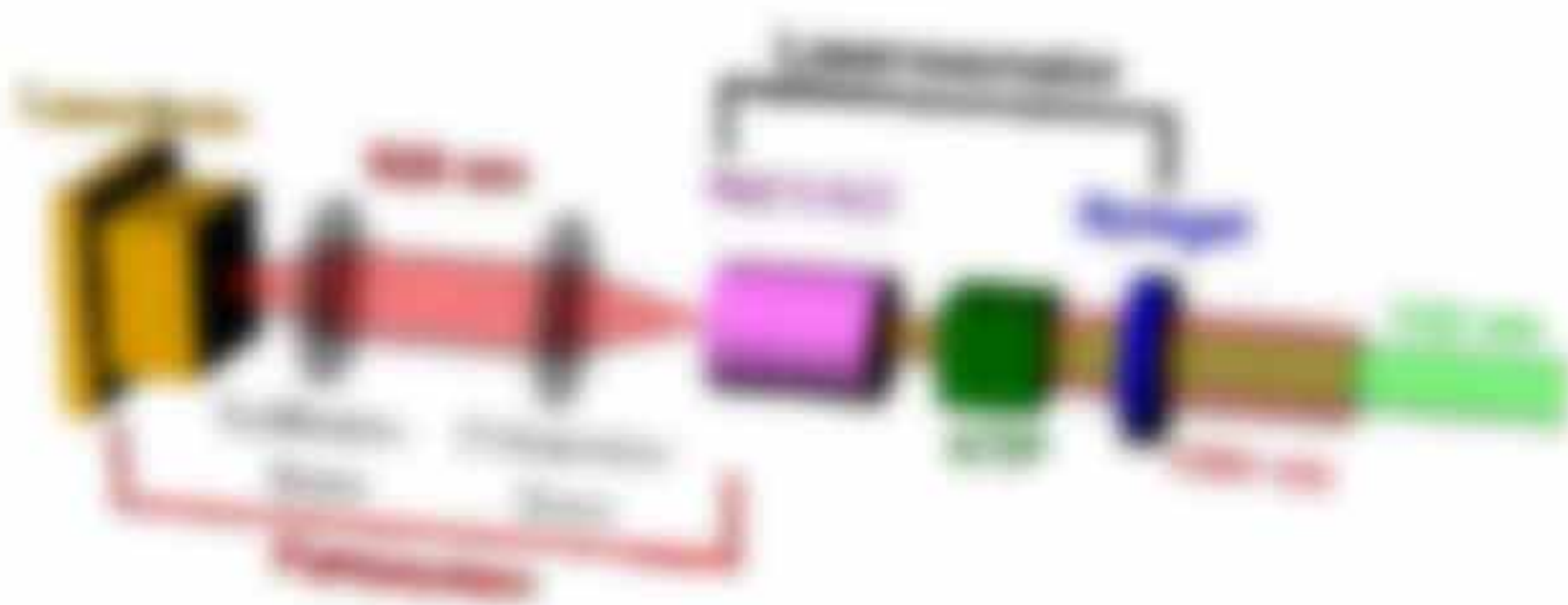


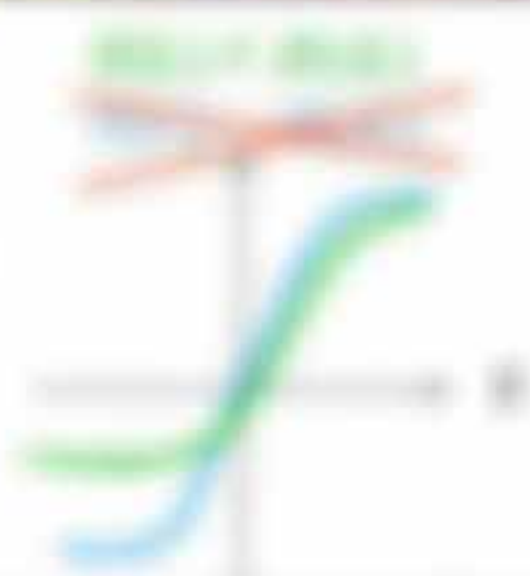
Abbildung 10.2: Dispersion in einem optischen Wellenleiter (siehe auch Abb. 10.1) und die Phasengeschwindigkeit $v(\omega) = \omega/k(\omega)$ der Wellenlänge ω in einem optischen Wellenleiter.

Phasengeschwindigkeit $v(\omega)$ ist nicht konstant bei unterschiedlichen Wellenlängen, was in der sogenannten Wellenlängendispersion (siehe auch Abb. 10.2) resultiert. Periodische Strukturen wie Gitterstrukturen eignen sich besonders für experimentelle Wellenlängendispersion (siehe auch Abb. 10.2).



Wellenlängendispersion $\omega''(\Delta z) \neq 0$

Diese Wellenlängen zeigen kein Gitter, da die Wellenlängen konstant sind. Es muss $\omega''(\Delta z) = 0$ sein, wenn die Wellenlängen eine ungerade Funktion ist, wie $\omega''(\Delta z) = \omega_0(\Delta z) + \frac{1}{2} \omega''(\Delta z) \Delta z^2 + \dots$ (siehe auch Abb. 10.2) oder bei Wellen, wenn in der Wellenlänge $\omega''(\Delta z) = 0$.



Quadratische Effekte

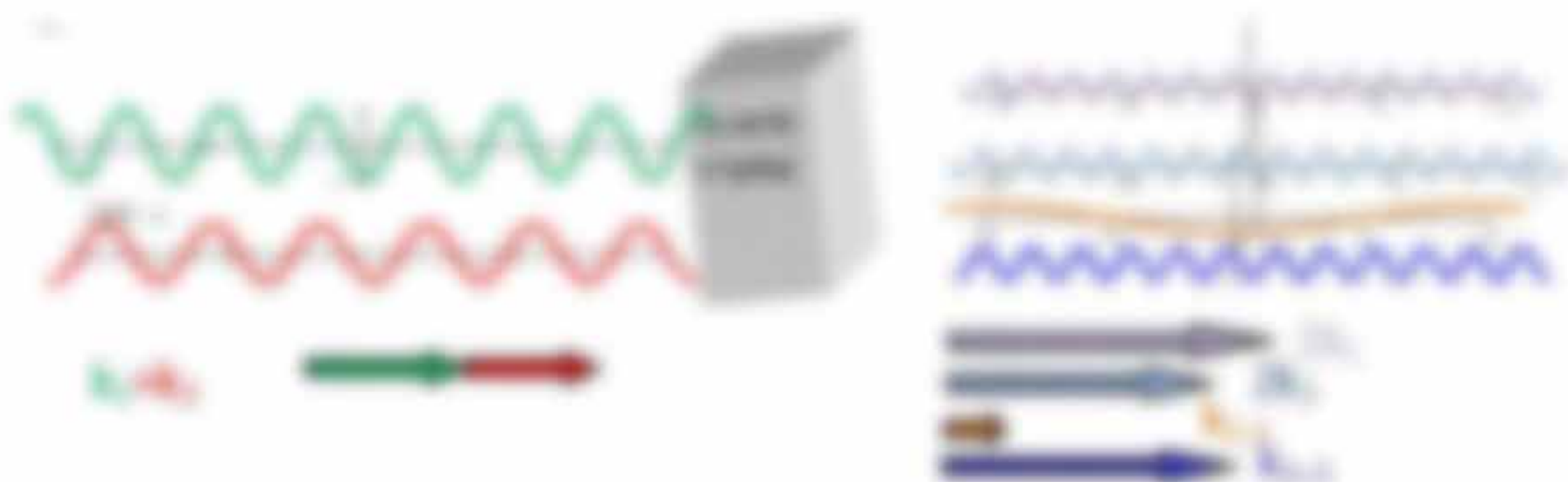
Verwandt sind der elektrooptische Pockels-Effekt (PPE) und der magnetooptische Faraday-Effekt (FOE), welche den \vec{D} -Feld-vektor im Ansatz (2.10) ändern. Allerdings wirken hier nur bestimmte lineare Terme $\vec{D}(\omega) = \vec{D}(\omega)$ bzw. $\vec{D}(\omega) = \vec{D}(\omega)$ an dem gilt:

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (2.10)$$

4.1.2 Frequenzmischung

Leitet man in einem nichtlinearen Medium zwei Wellen $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ mit den Frequenzen ω_1 bzw. ω_2 und k_1 bzw. k_2 ein, so erhält man Mischterme mit Summenfrequenz und Differenzfrequenz:

$$\begin{aligned} \vec{D}(\omega) &= \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : (\vec{E}_1 \vec{E}_1 + \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \vec{E}_2) \\ &= \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega) + \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : (\vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \vec{E}_1) \\ &= \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : (\vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \vec{E}_1) + \epsilon_0 \vec{\chi}^{(2)} : (\vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \vec{E}_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$



Leitung des Kristalls in die gleiche Ausbreitungsrichtung

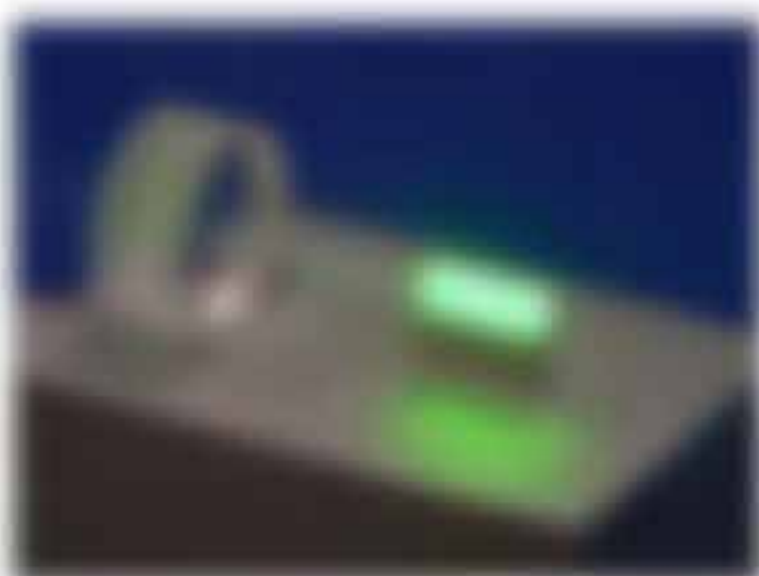
Es verhalten sich Photonen mit vier verschiedenen Frequenzen $\omega = \pm \omega_1$ bzw. ω_2 , für die alle Energie-Erhaltung (Phasenerhaltung $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$) und Energie-Erhaltung gelten muss. Diese gelten für die Summenfrequenz:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = \omega_4 = \omega_1 + \omega_2, \quad \text{Energie: } \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (2.12)$$

Phasenerhaltung bei Frequenzmischung lässt sich leichter erfüllen als bei PPE, da die Richtungen der Einfallswellen k_1 und k_2 frei frei wählbar sind.

Parametrische Down-Conversion (PDC)

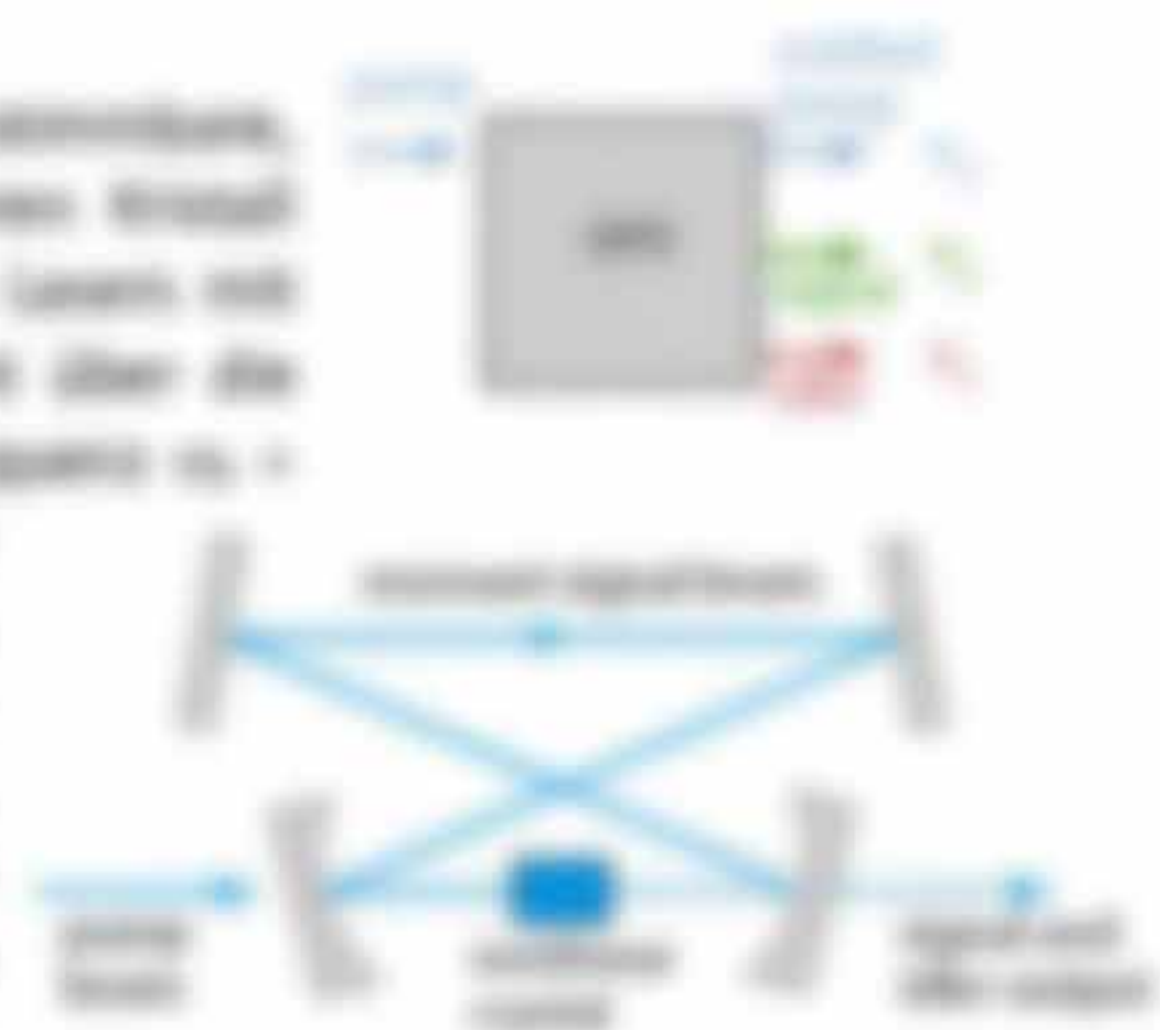
Nimmt man den Effekt, wenn ein (1) Pump-Photon in einem nichtlinearen Kristall zwei (2) Tochter-Photonen der doppelt Wellenlänge produziert. Dies passiert wieder mit



geringer Wellenlängenbereich, die beiden Teilstrahlplänen sind nicht unabhängig voneinander, d.h. es liegen Quasi-Korrelationsfunktionen vor, die durch ein verstreutes Photon oder gestreutes Licht, was sich durch einen reduzierten Photonenrauschen im Detektor auszeichnet (Rauschen = unkorrelierte Ereignisse) – siehe auch Appendix. In nach experimenteller Technik spricht man von optisch parametrischer Verstärkung oder von einer

Optisch parametrische Verstärkung (OPA)

Dies ist eine über Grenzflächenverstärkung durch ein nichtlineares, verlustfreie optisches Element, das man in verschiedenen Wellenlängenbereichen zwischen einem Pumpstrahl einer Laser mit ω_p und einem Signalstrahl mit ω_s , so entsteht über die Differenzfrequenz erzeugtes Überstrahl mit der Frequenz $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ Überlagern mit dem ω_s Pumpstrahl und Überstrahl $\omega_i + \omega_s = \omega_p$, so entsteht durch einen Resonator verstärkt (verstärkt) Signalstrahl mit der Frequenz ω_s . Über Brechungsindexänderungen z.B. über Temperatur oder mechanische Dehnung ist auch die Frequenz ω_s erweiterbar – und zwar außerhalb der Frequenzen verfügbare dieser Laserstrahl. (Quelle: W. P. Schleich)



Effekt 3: Ordnung $\chi^{(2)}$

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^{(1)} E^{(1)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} (E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t})^2$$

$$= \epsilon_0 \chi^{(2)} (E_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + E_2^2 e^{-2i\omega_2 t})$$

Man ist keine Transparenzsymmetrie notwendig, so dass dieser Effekt auch in Flüssigkeiten wie Wasser sichtbar ist. Beispiel sind:

- Das Phasematch-Abgleich ist ein nichtlineares optisches Prozess 2. Ordnung mit $\chi^{(2)}$ = 0, aber $\chi^{(2)}$ = 0 = $\chi^{(2)}$ (mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) und $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ mit $\omega = 2\omega$
- Strukturierter Resonator-Effekt: für ein Material mit optischer Überstrahlfrequenz erzeugt sich bei einfallender Lichtfrequenz die Frequ. ω_1
- Der Phasematch 2. Ordnung tritt auch bei Resonator mit $\chi^{(2)}$ (mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) – siehe auch Eq. 8.29



6.4. Fluoreszenz

Fluoreszenz ist allgemein die optische Strahlung eines physikalischen Systems, die beim Übergang von einem angeregten Zustand zum Grundzustand entsteht. Je nach Art der Anregung gibt es verschiedene Arten der Lumineszenz, wie z.B.

- a) **Chemolumineszenz:** Anregung des Systems durch chemischen Strom, z.B. Leuchtstäbe, Gl. Teller oder Glühbirne
- b) **Photolumineszenz:** Anregung des Systems durch Photonen

6.4.1. Grundlagen

Elektronische Zustände und Übergänge

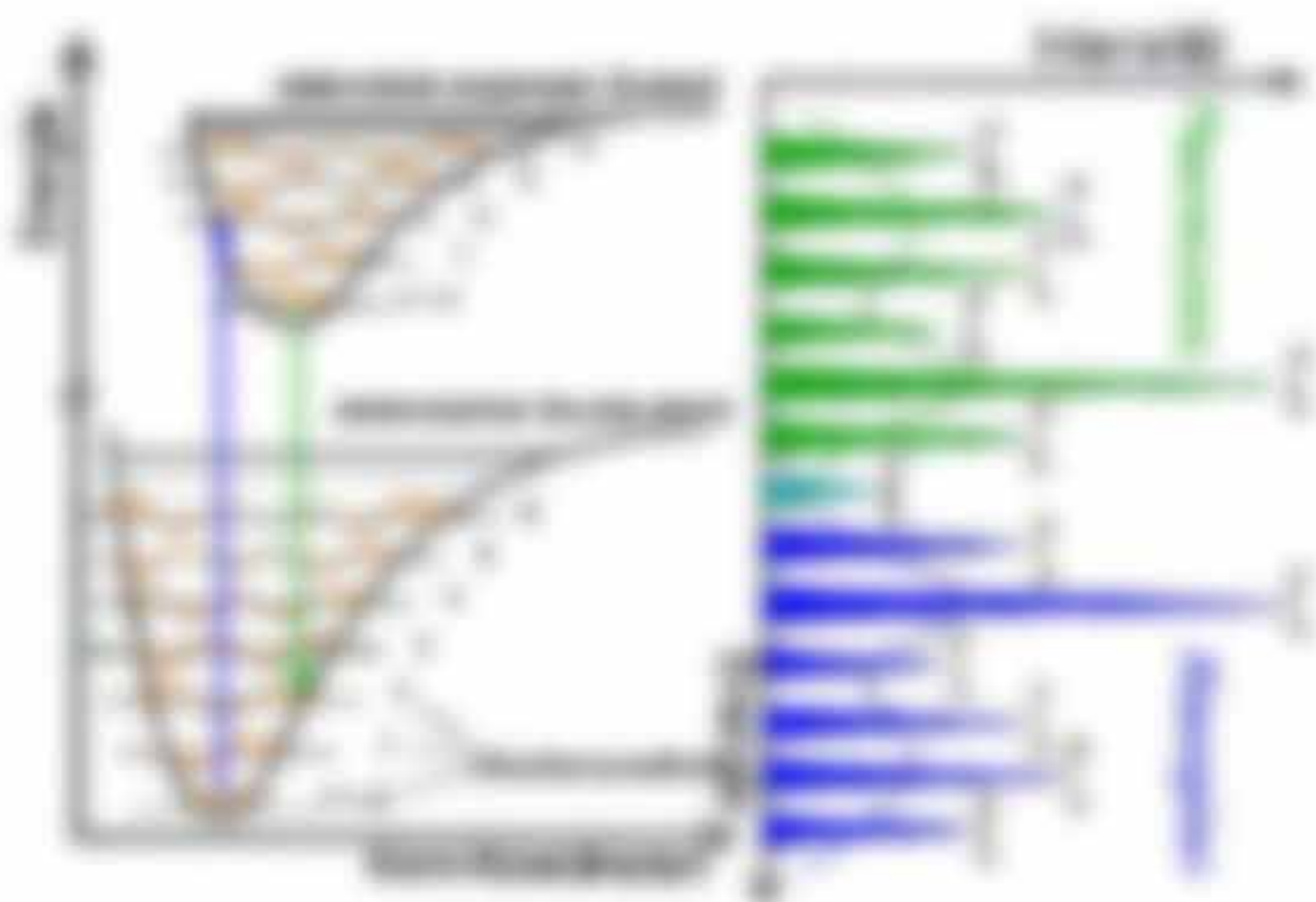
Die Zustände von Elektronen (ψ) im Atom oder Molekül werden durch Quantenzahlen (l, m, j, n) beschrieben, wobei gilt:

- $l = 0, 1, 2, \dots$: Haupt- l -Zahl \rightarrow „Schalen“
- $m = 0, \dots, \pm l$: Drehimpuls- m -Zahl \rightarrow „Orbitale“ ($l=0$ enthält $2l+1 = 1$ Orbital, $l=1$ enthält $2l+1 = 3$ Orbitale)
- $j = l \pm 1/2$: Spin- j -Zahl \rightarrow „Orientierung“ des l -Drehimpulses
- $n = 1, 2, 3, \dots$: Spin- n -Zahl des l

Auswahlregeln für optische Übergänge: die erlaubte Phasen umfassen den Drehimpuls (l und m), wobei gilt: $\Delta l = 0, \pm 1$ und $\Delta m = 0$ (Multipolstrahlung 2. Ordnung)

a) **Fermis Goldenes Regel:** $\langle \psi_f | \hat{H}' | \psi_i \rangle$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit von Niveau i auf Niveau f . Herleitung aus gestörtem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$, mit $\psi = \psi_0 + \psi_1$ (unabhängig), \hat{H}' ist kleine Störung, welche Übergangswahrscheinlichkeit P_{if} eines Photons zwischen den Zuständen $|\psi_i\rangle$ und $|\psi_f\rangle$ induziert, mit Energieerhaltung $E_f = E_i + h\nu$

b) **Das Frank-Condon-Prinzip:** besagt, dass im Energieabgleich nur vertikale Übergänge, also bei konstantem Kern-Koordinaten stattfinden können. Da der Wechsel von Elektronen zwischen verschiedenen Zuständen sehr schnell stattfindet (in 10^{-15} Sekunden) ändert sich der Kernzustand während der Anregung nicht (wie eine Resonanzfrequenz $\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}$)

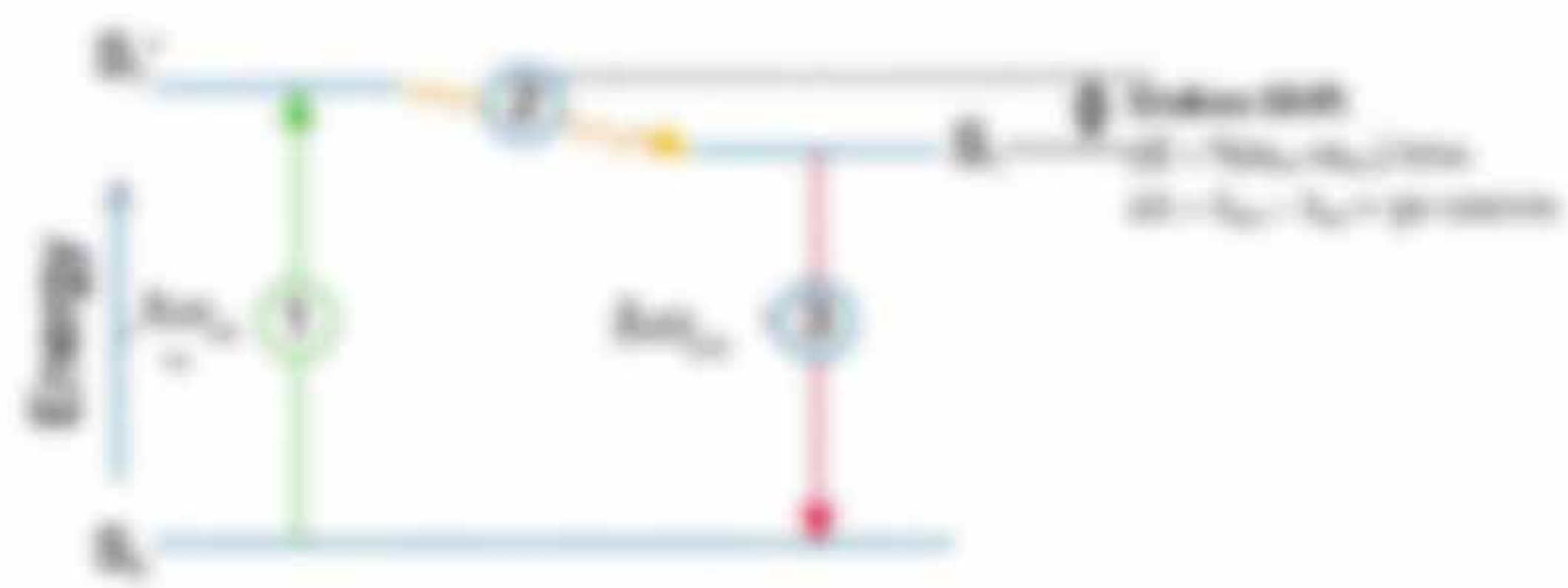


Wichtig ist, dass vertikale Übergänge von den elektronischen Zuständen im Moment einer geringen Kernkoordinaten zu einem höheren elektronischen Zustand stattfinden können, wenn die Kernkoordinaten im angeregten Zustand ein Maximum bei kleiner Kernkoordinaten haben.

Vertikale Übergänge sind im Energieabgleich bei konstantem Kern-Koordinaten möglich, da die Kernkoordinaten im angeregten Zustand ein Maximum bei kleiner Kernkoordinaten haben. Die Energieerhaltung $E_f = E_i + h\nu$ ist im gestörten Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ erfüllt, wobei \hat{H}' die kleine Störung ist, welche Übergangswahrscheinlichkeit P_{if} eines Photons zwischen den Zuständen $|\psi_i\rangle$ und $|\psi_f\rangle$ induziert, mit Energieerhaltung $E_f = E_i + h\nu$

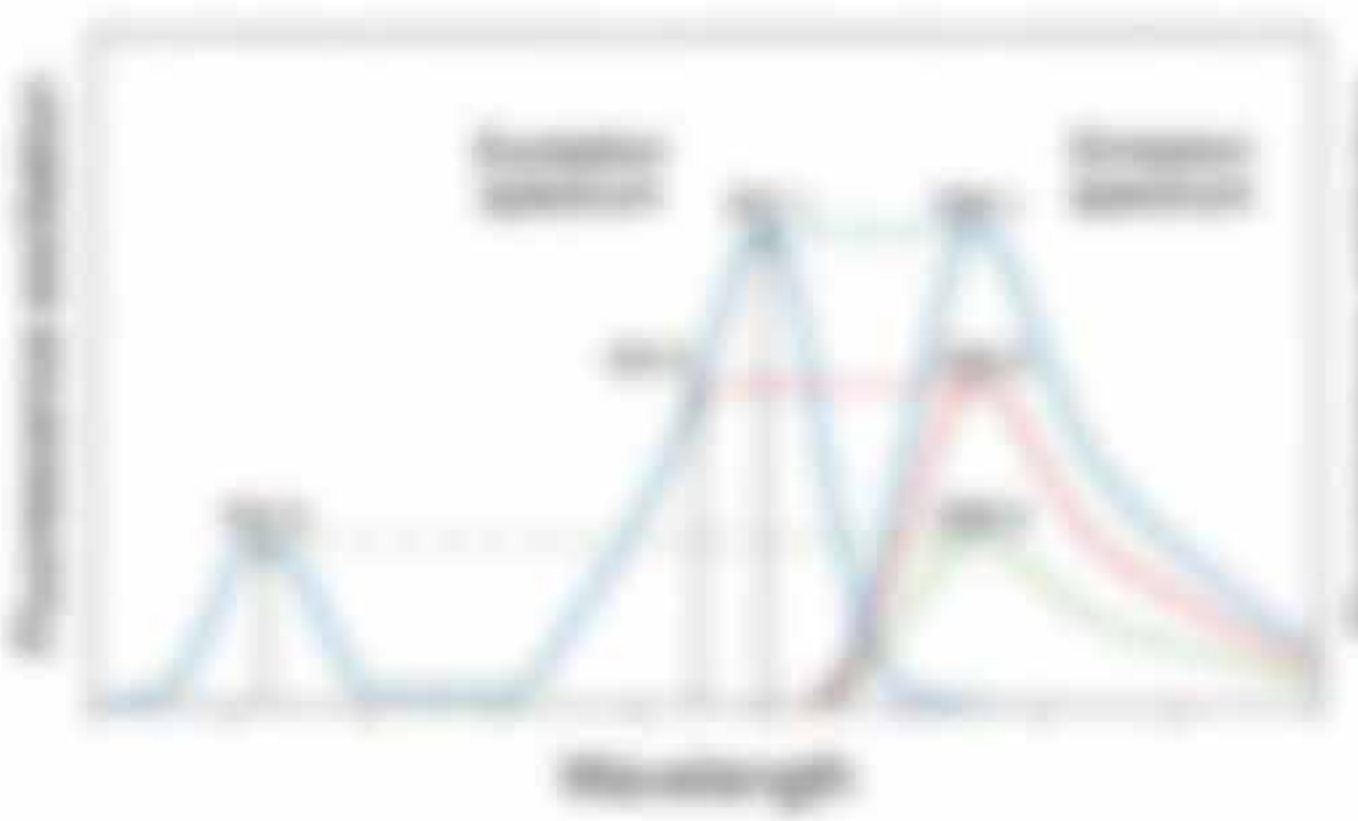
Springfeld liegt im Zustand ohne weitere 2. Darfals-Auslöser und Anregung und Erregungszustand.

Stufenübergang: Energieübertragung zwischen elektronischen und vibronischen (Lichtemischer) Erregungszuständen eines Moleküls oder Kristalls werden vermittelt durch ein Stufenübergang Diagramm.



- (1) Die Anregung h zwischen den Erregungszuständen (mit Ziffer 0) $S_0 \rightarrow S_1$ ist schnell (10^{15} s) und geschieht durch Absorption eines Photons mit der Energie $h\nu_{ab} = E_1 - E_0$.
- (2) Nach 10^{15} s relaxiert der Elektron zwischen vibronischen Niveaus in der erregten Zustände ($S_1 \rightarrow S_1$ interne Konversion).
- (3) Fluoreszenz F entsteht durch spontane Anregung von $S_1 \rightarrow S_0$ unter Erlassung eines Photons mit der Energie $h\nu_{fl} = E_1 - E_0$.

Stufenübergang des Fluoreszenzlichts ist langwelliger $\lambda_{fl} > \lambda_{ab}$, $\nu_{fl} < \nu_{ab}$ als die Anregungslicht. Energie geht durch interne Konversion verloren.



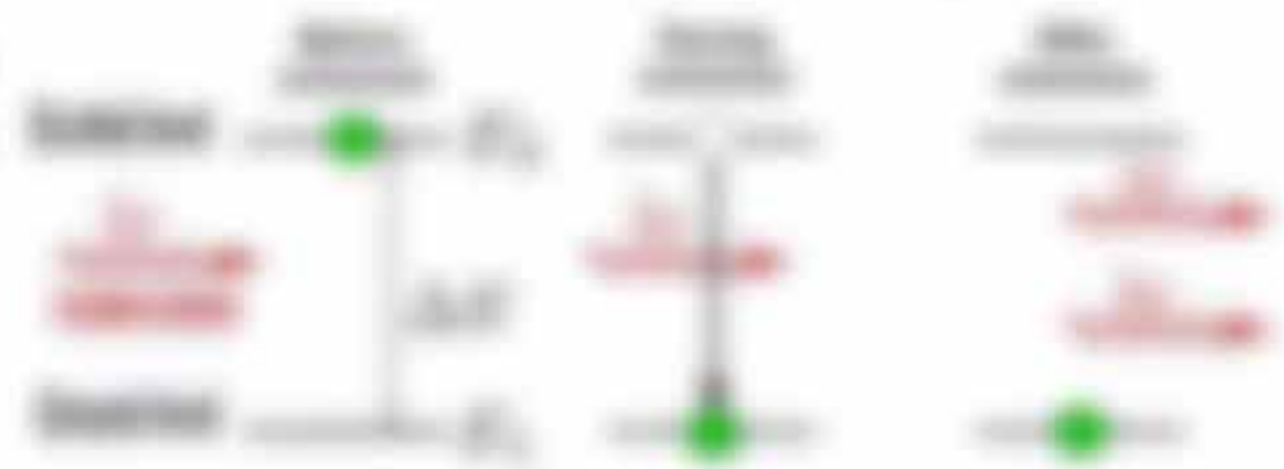
Erklärung des Temperaturabhängigkeit der Fluoreszenzintensität: Mit der Temperatur steigt die Schwingungszahl der Moleküle an, was zu einer Erhöhung der Energieverluste durch interne Konversion führt, was die Fluoreszenzintensität verringert.

6.4.2. Andere energetische Zustände im Material

- **Fluoreszenz (F) tritt auf, nachdem** Fluoreszenz auf einem niedrigeren Triplet-Zustand T_1 (mit $2S+1=3$) gelandet ist (nach langer Lebensdauer (NS) Lumineszenz mit $k_{F,T_1} = k_{T_1} - k_{T_1}$, kein „verbotener“ = schneller Übergang $T_1 \rightarrow S_0$, Problem: Von T_1 aus ist keine Umkehrung (Erstarrung) möglich (siehe Einzel-Referenz sowie mit Freund!))

- **Strahlende Verluste (S) (ST) von Singleten** als Umkehrung der Absorption (A) vorzuzug. Die Rate von Nichtstrahlungsverlusten für A und S sind gleich groß!

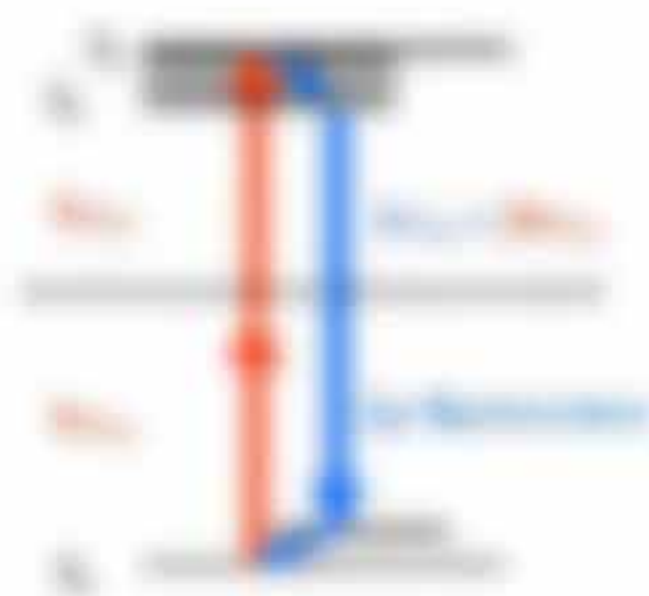
Die Rate mit der sich angeregte Spezies $\rightarrow 2$ verliert Fluoreszenz werden erhöht (Lumineszenz) (\rightarrow um)



- **2-Photon-Fluoreszenz (2P-F)**

2-Photonen der Energie γ_{hv} (Stoß in Resonanz) regen ein Fluorophor an, welches ein Fluoreszenz mit der doppelten Frequenz $\nu_f = 2 \nu_a$ emittiert.

Fluoreszenz innerhalb der Lebensdauer in der angeregten Zustand muss ein 2-Photonen emittieren, damit eine 2-Photonen-Energie gemessen kann. Dies braucht man hohe Fluoreszenz-Effizienz des Materials, welche am besten durch geeignete Laser erzeugt werden können.



- **Fluoreszenzlösung („Lösung“)**

Nach $10^7 - 10^8$ Anregungen (und Errechenen) geht das Fluorophor leicht in experimentelle Ineffizienzen in Lösung.

- **Fluoreszenzlösung („Lösung“)**

Nach einer angeregten Spezies mit einem anderen (zweites „Quencher“) führt zu NS oder Löschung der Fluoreszenz. Quencher können gezielt eingesetzt werden.

- **Quantenausbeute** einer Fluoreszenz heißt das Verhältnis

$$Q_{F,T_1} = \frac{\text{Zahl emittierter Photonen}}{\text{Zahl absorbierten Photonen}} = \frac{F_{F,T_1}}{I_{abs}}$$

6.4.3. Fluoreszenzenormierung

Fluoreszenznormierung benutzt man eine leuchtende Substanz $[F_{ref}]_{exc}$, Man kann eine geeignete Wellenlänge $[F_{ref}]_{exc}$ über den Anregungslinien $[F_{ref}]_{exc}$ setzen und legt die Fluoreszenznormierte Probe an. Man bestimmt über dem über den Emissionen $[F_{ref}]_{em}$ mit der schwächeren Fluoreszenzintensität $[F_{ref}]_{em} [C_{ref}]$.

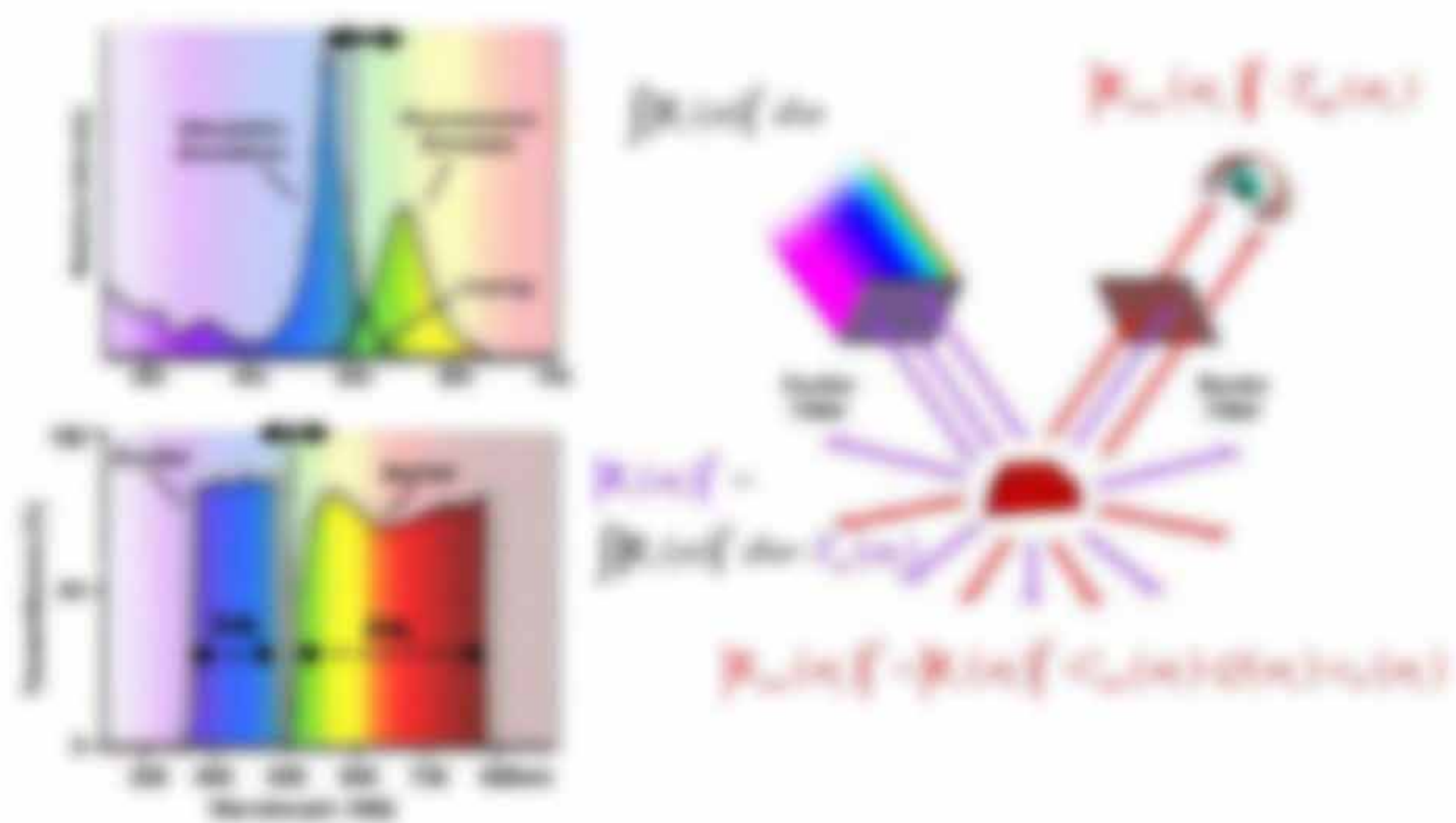


Abbildung 106: Prinzip der Normierung der Anregungs- und Fluoreszenzintensitäten. Die beiden eingetragenen Fluoreszenzspektren sind aus dem Fluoreszenzspektrum der Normierung und der Anregungslinien ablesbar, wenn aus dem Fluoreszenzspektrum der Normierung und Emissionen ablesbar.

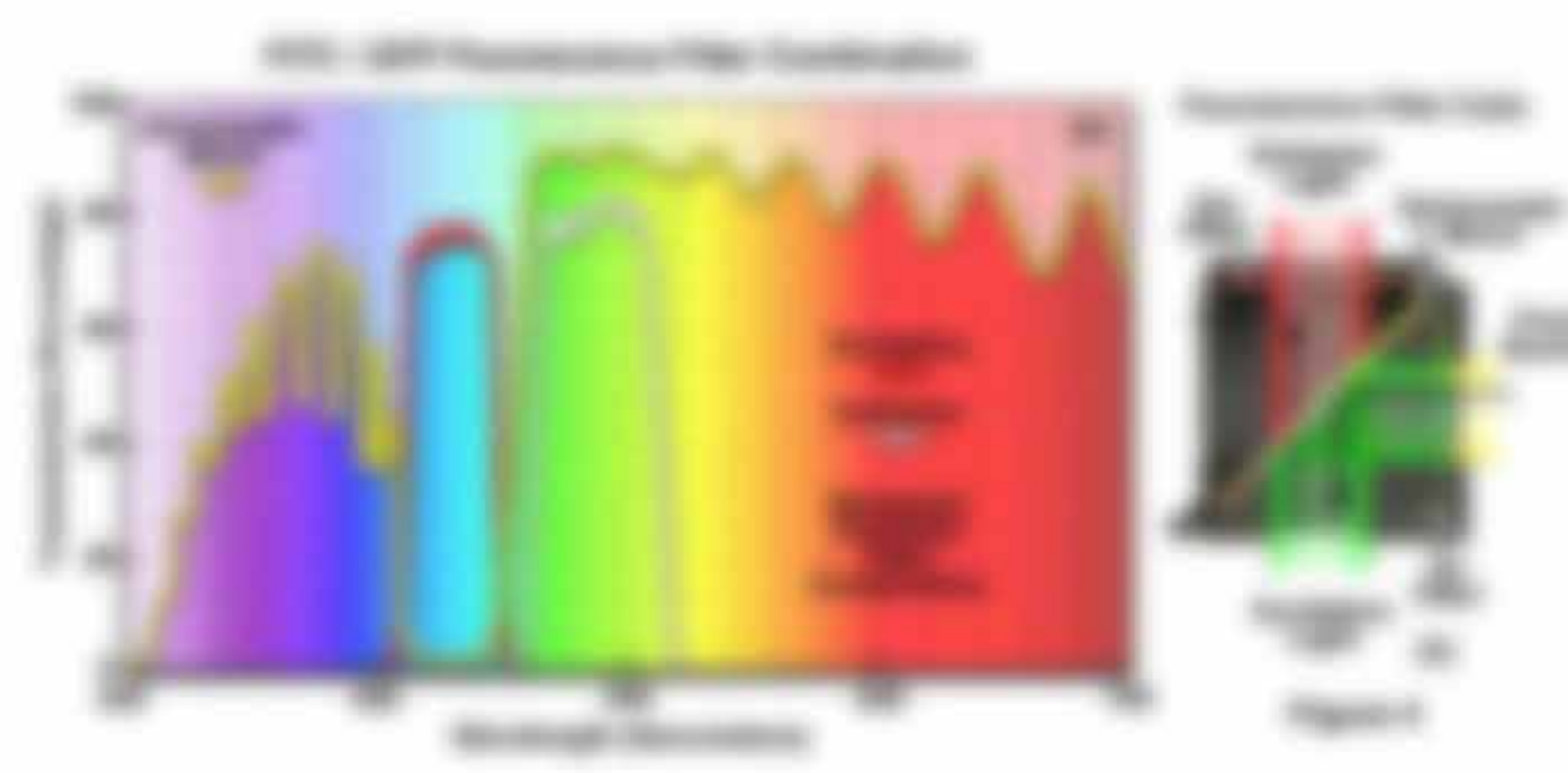


Abbildung 107: Spectral representation of excitation and fluorescence light using different chemical dyes.

4.5. Kern-Physik

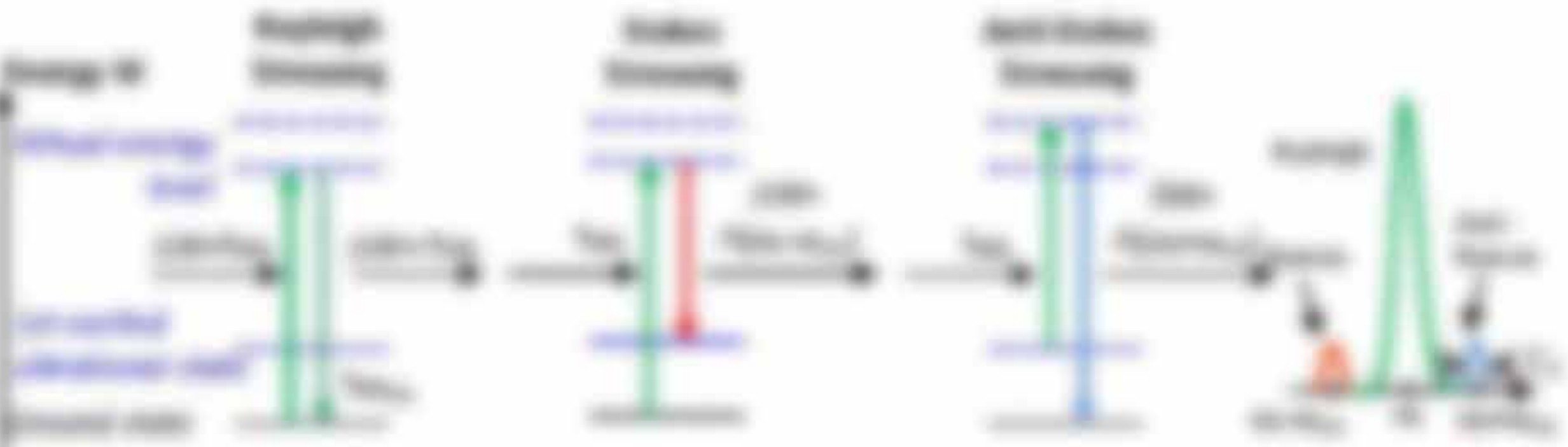
ist ein kollektiver Bewegungszustand eines Nucleons (auch Kern-Effekt). Das mittlere Verhalten ist durch die Wellenfunktion und besitzt eine höhere oder niedrigere Frequenz als die des existierenden Nucleons. Der Anteil des rot- oder blau-veranschaulichten Nucleons ist jedoch um einen Faktor ω^2/ω_0^2 geringer als der des statisch getriebenen Nucleons (Rücklauf-Bewegung). Der Effekt wurde 1928 von Adolf Becka entdeckt und 1938 durch G. E. Brown experimentell nachgewiesen (Physik Zeitschrift 1938).

Bei der Licht-Wellenbewegung mit einem Nucleon bzw. Atom, kommt es mit geringer Wahrscheinlichkeit auch zu einem kollektiven Bewegungszustand von Proton auf der Ebene. Dabei stehen sich die Rotations- und Schwingungsenergie des Nucleons (bzw. des Protons) gegenüber.

Statischer Kern-Effekt: Das Nucleon befindet sich nach dem Bewegungszustand auf einem kollektiven Bewegungszustand mit einer und langwelligeren Licht wird emittiert.

Kollektiver Kern-Effekt: Das Nucleon befindet sich nach dem Bewegungszustand auf einem niedrigeren Bewegungszustand mit einer und langwelligeren Licht wird emittiert (siehe auch Bewegung 10).

Kern-Frequenzänderung: wird nur die Frequenzänderung zwischen angeregten und Grundzustand Proton. Sie ist charakteristisch für die Nucleon-Ebene.



Bewegung des Nucleons in der Bewegung, wobei die Frequenzänderung

Physikalisches Prinzip: Frequenzänderung der Wellenfunktion des Nucleons mit der Frequenz ω_0 ergibt sich eine Frequenzänderung $\omega = \omega_0 + \omega_{\text{rot}} + \omega_{\text{schw}}$, wobei die Frequenzänderung ω_{rot} durch die Rotationsenergie ω_{rot} und eine Frequenzänderung ω_{schw} erfolgt werden kann.

$$\omega = \omega_0 + \omega_{\text{rot}} + \omega_{\text{schw}} \tag{4.5.1}$$

Die Frequenzänderung $\omega = \omega_0 + \omega_{\text{rot}} + \omega_{\text{schw}}$ und damit das getriebene Feld $E_{\text{rot}} = \omega_{\text{rot}}$ hat nach Multiplikation des existierenden Feldes $E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}} \exp(i\omega_{\text{rot}}t)$ mit einem Term

$$F = E_{\text{rot}} \exp(i\omega_{\text{rot}}t) + \omega_{\text{schw}} \exp(i\omega_{\text{schw}}t) \tag{4.5.2}$$

$$E_{\text{rot}} \exp(i\omega_{\text{rot}}t) + \omega_{\text{schw}} \exp(i\omega_{\text{schw}}t) \tag{4.5.3}$$

Betrachtet man nur die getriebene Wellenfunktion $E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}} \exp(i\omega_{\text{rot}}t)$ bzw. die Wellenfunktion

Das gemessene totale Zieg $\Sigma \sigma_{tot}(E)$ ist daher nur eine Abbildung des realen über die beiden Kernbestandteile links und rechts neben dem Kernpotentialbarriere.

Man erhält mit der Kernoptischen Potentialbarriere über Stoffe, die sich langsam verformen bei Änderungen in anderen Parametern.

Während die optische Potentialbarriere mehr über Kernkräfte tragen von angeregten und hochenergetischen Neutronen abhängt, ist die Kernoptische Potentialbarriere für die Charakterisierung des Kernpotentials, Änderungen bei Verformungsprozessen, aber auch Charakterisierung von Carbon-Nuclei.

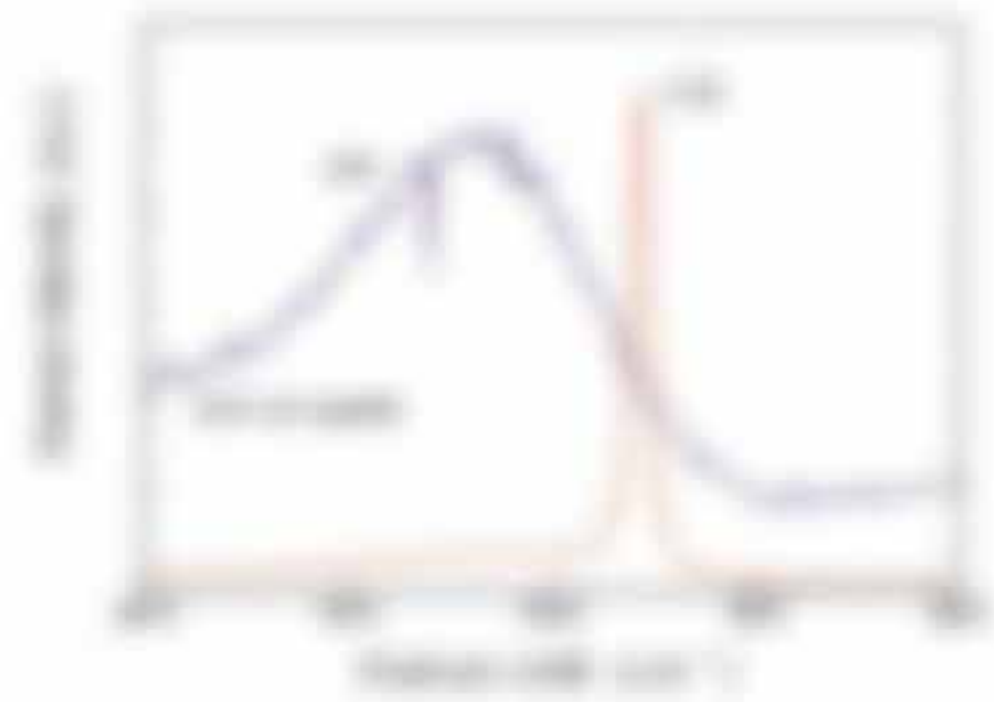
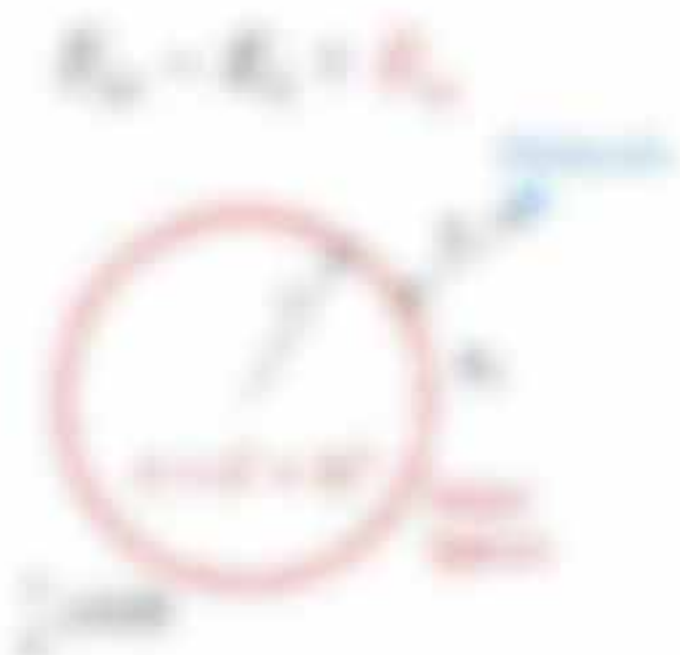


Abbildung 10: Kernoptische Potentialbarriere und totale Zieg

Charakteristische Kernphysik

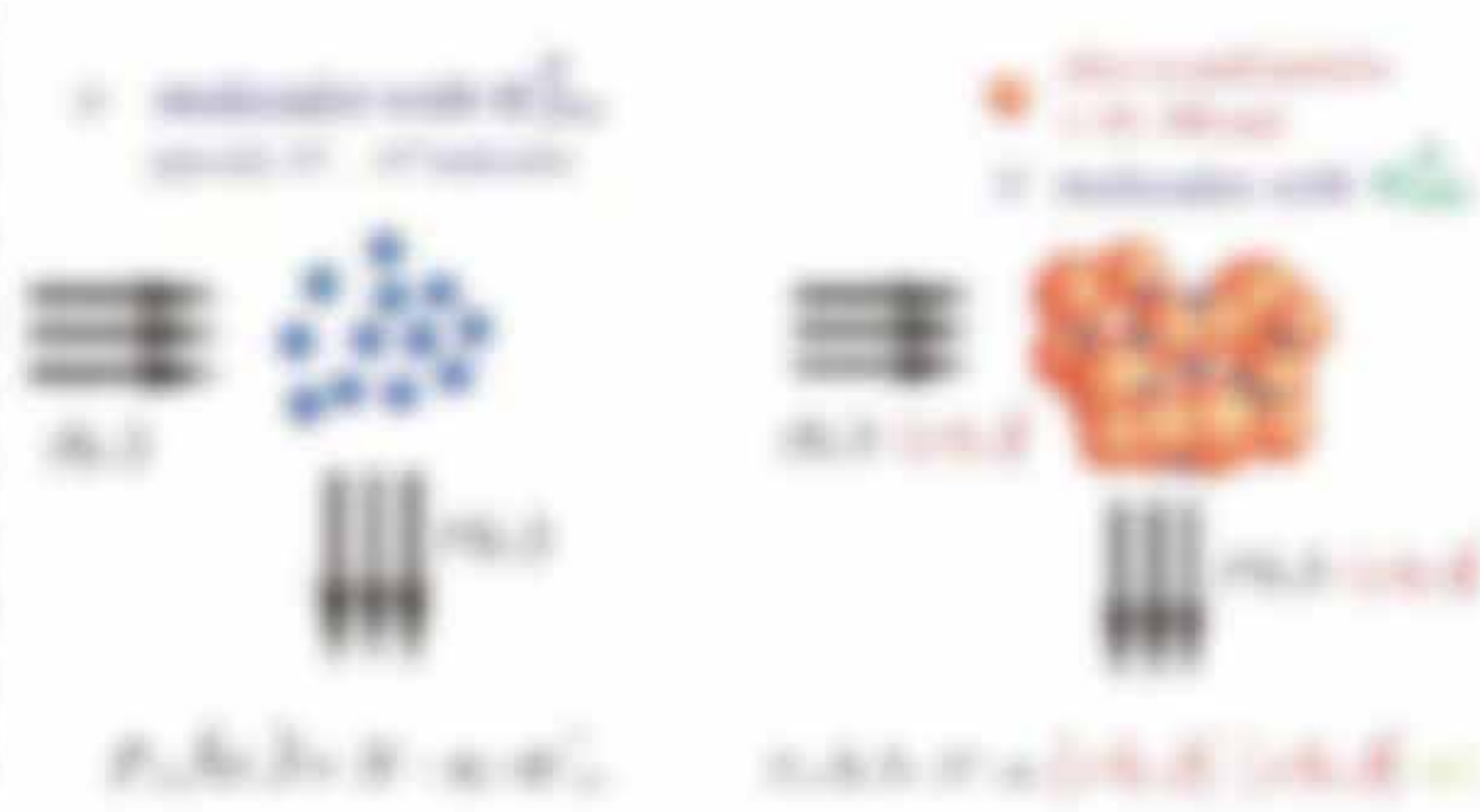
Die totale Zieg (Kernoptische Potentialbarriere) ist auf zwei wesentliche Effekte in der Kern-Optik zurückzuführen: die optische Potentialbarriere (OPB) und die Kernoptik.

Die Kernoptik von Neutronen mit einer typischen Wellenlänge von 10^{-10} m erfordert eine hohe Genauigkeit in den Parametern der Kernoptik, um ein bestimmtes Signal zu erhalten. Kernoptische Potentialbarriere (OPB) ist ein wesentlicher Bestandteil.



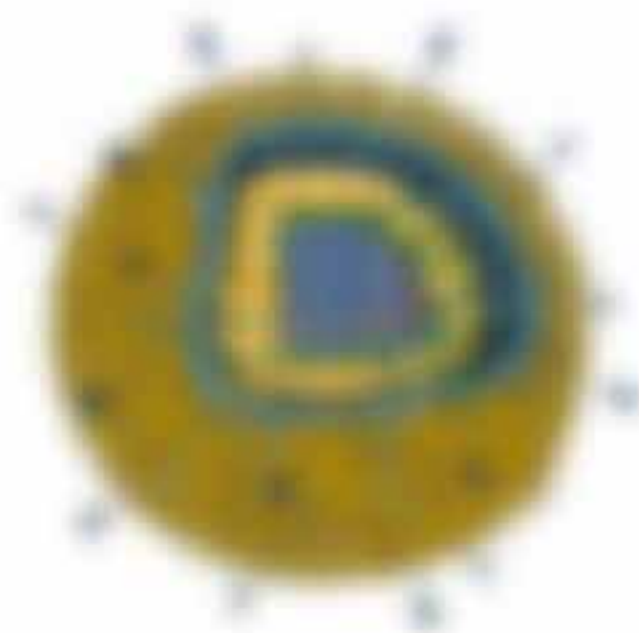
Die Aufnahme von OPB kann nur durch die Kernoptik $F_{el}(E)$ von 10^{-10} m gegenüber der optischen $F_{in}(E)$ in Abhängigkeit der Oberfläche erhalten (Zerlegung in die in Kapitel 4.4 über Kernkräfte weiter erläutert), wobei es durch Oberflächenpotentiale in Neutronen mit dem erforderlichen Feld zu einer sehr starken Reflexion in den Kernoptik weiter ergänzt werden, "OPB".

Zusätzlich wird die Kernoptik durch die Kernoptik durch die Kernoptik ergänzt, "OPB", was zu einer 10^{-10} m-Wellenlänge führt. Die Kernoptik muss sich mit der Kernoptik von Neutronen verhalten, diese Energie und effiziente Reflexion an die Kernoptik mit einer hohen Genauigkeit.



1.1. Fluoreszierende Quantenpunkte

Werden auch häufig als Quanten-Dot bezeichnet und sind halbleitende Nanokristalle. Sie gehören der Klasse von 0D, 1D, 2D, or 3D Materialien an, welche auch für QDs benutzt werden. Sie haben typische Durchmesser von 2-10 nm (20-50 Å) und fluoreszieren nach optischer Anregung in verschiedenen Farben je nach ihrer Größe.



Physikalische Wirkungsweise

Bei Anregung eines Elektronen-Lochpaars eines Quantens, wird ein Elektron von Valenzband (VB) über die Bandlücke in Leitungsband (LB) gehoben. In der resultierenden Wellenfunktion (WF) eines Quantens (sein Radius) größer als der Wellenlänge, so hat man den Effekt des Quantenmechanischen Quanten Confinement, die Folge verschoben sich die Energieebenen im Valenzband und die optischen Eigenschaften des Partikels ändern sich je Größe der Durchmesser des Quantens, desto größer wird die Energie Bandlücke und desto energiereicher (blauer) wird der emittierte Licht.

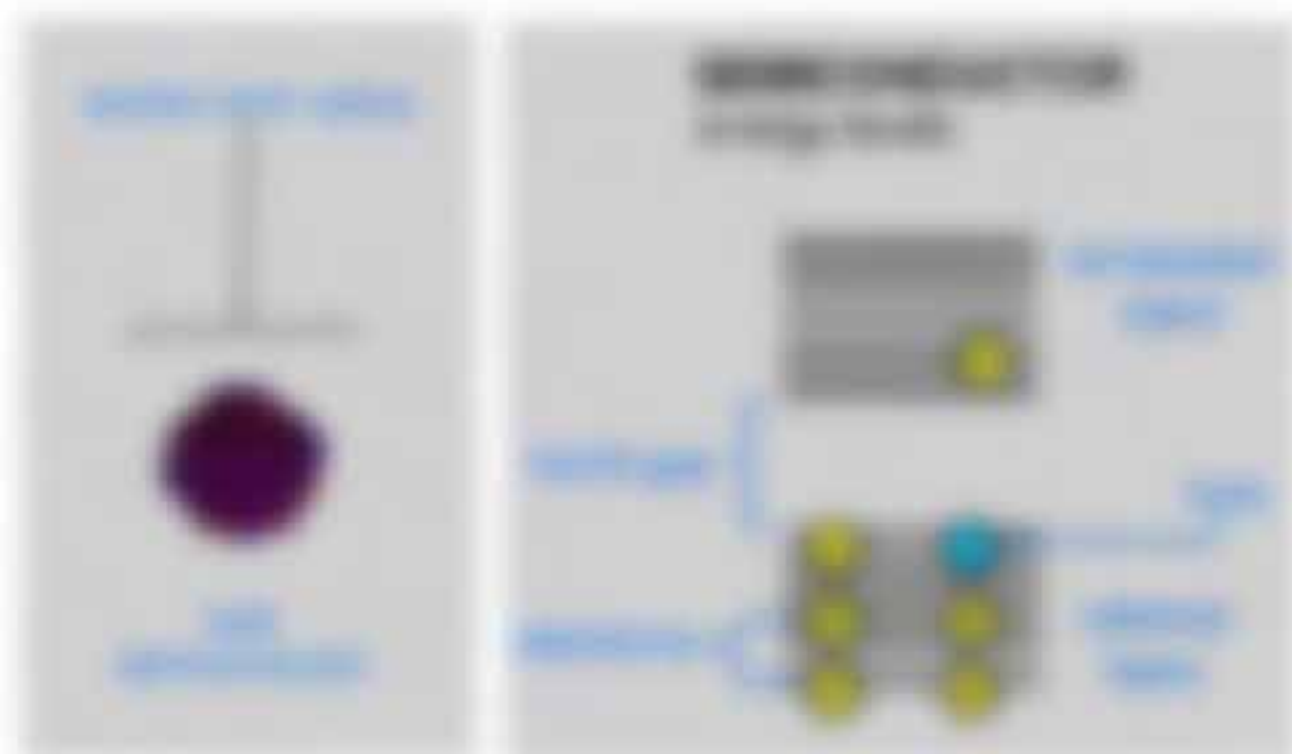
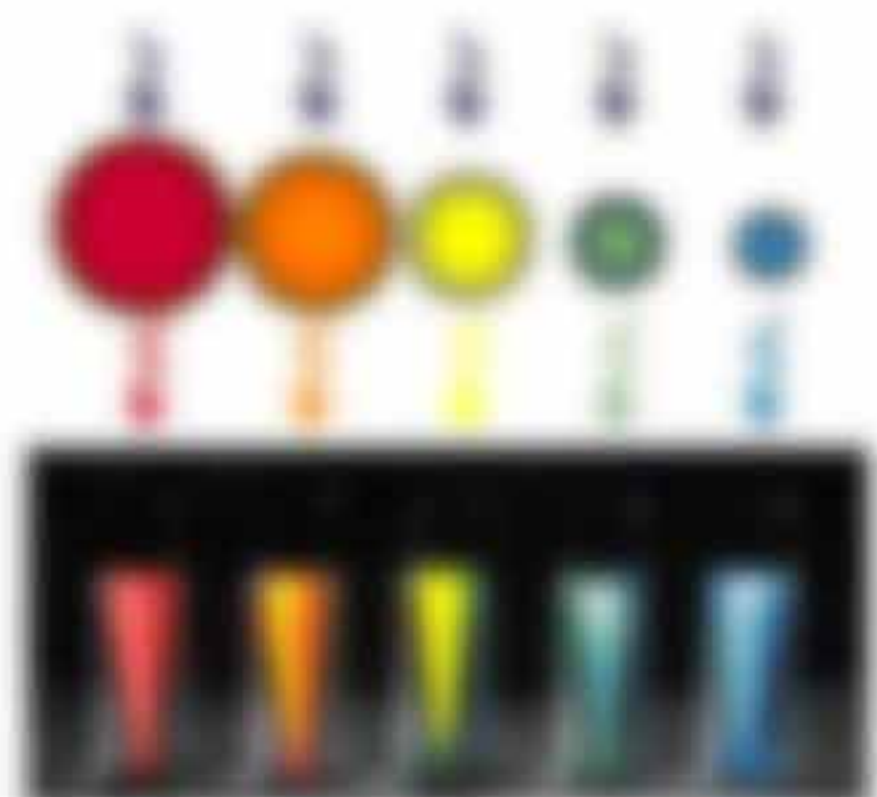


Abbildung 1.10: Quantens Konfinement und Energieebenen Quantenmechanisches Confinement

Wenn betrachtet man die Zustandsdichte der Elektronenergien im LB, VB, welche für einen ungestörten 3D Wellens $D(E) \propto E^{1/2}$ ist, entspricht der Umkehrung des LB, wird der Material in einer Richtung verengt, so bewirkt das Quanten Confinement eine Discretisierung von 3D unter Wirkung 1D bis man beim 0D-Quantenpunkt wie in einem Atom diskrete Zustände im LB bekommt, also $D(E) \propto \delta(E - E_i)$. Diese entsprechen in etwa den Energieebenen E_i eines Elektrons in einem Nanokristall $E_i \approx E_g + (2i\pi\hbar)^2 / 2m_e^*$ die effektive Elektronen- und Lochmasse im Kristall.



Die Energieerweiterung der Bandlücke

$$E_g = E_g^0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* a^2} \quad (1.40)$$

hängt ab von wie die folgende Wellenfunktion ψ , dem $\psi_{nl} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ vom Radius $r = r_0$ des Kristalls (sein Radius $r_0 = 1/2$ Durchmesser) und der Hauptquantenzahl n des angeregten Energiezustand $n = 1, 2, 3, \dots$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{r}{a} \right)^{l+1} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (1.41)$$

Form	Fläche	Volumen
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Zylinder	$2\pi r^2 + 2\pi r h$	$\pi r^2 h$
Quader	$2(ab + ac + bc)$	abc
Kugelkappe	$2\pi r h$	$\frac{1}{3}\pi h^2(3r + h)$



Abbildung 18: Verhältnisse von Oberfläche zu Volumen für verschiedene Körper. In Abhängigkeit von der charakteristischen Länge l sind die Verhältnisse A/V für verschiedene Körper dargestellt. (Quelle: [1], S. 10)

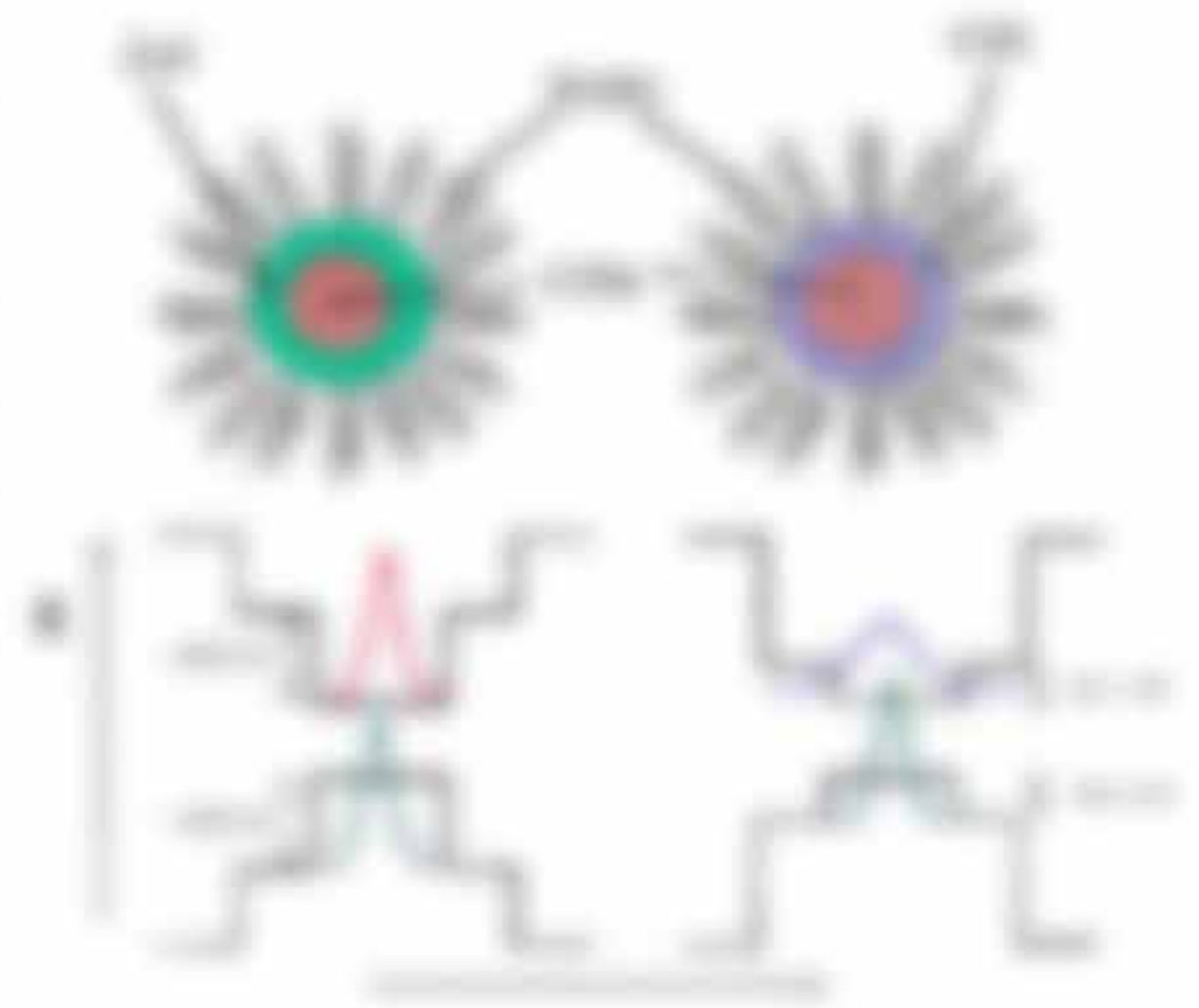
Zur Abb. 18 (1) sollte man, dass bei der Verkleinerung des Radius r die Oberfläche mit $\sim r^2$ und das Volumen mit $\sim r^3$ vermindert. Somit wird auch die Oberfläche/Volumen verhältnis vermindert.

l	A/V	A/V	A/V
1000	0,0003	0,0003	0,0003
100	0,003	0,003	0,003
10	0,03	0,03	0,03
1	0,3	0,3	0,3

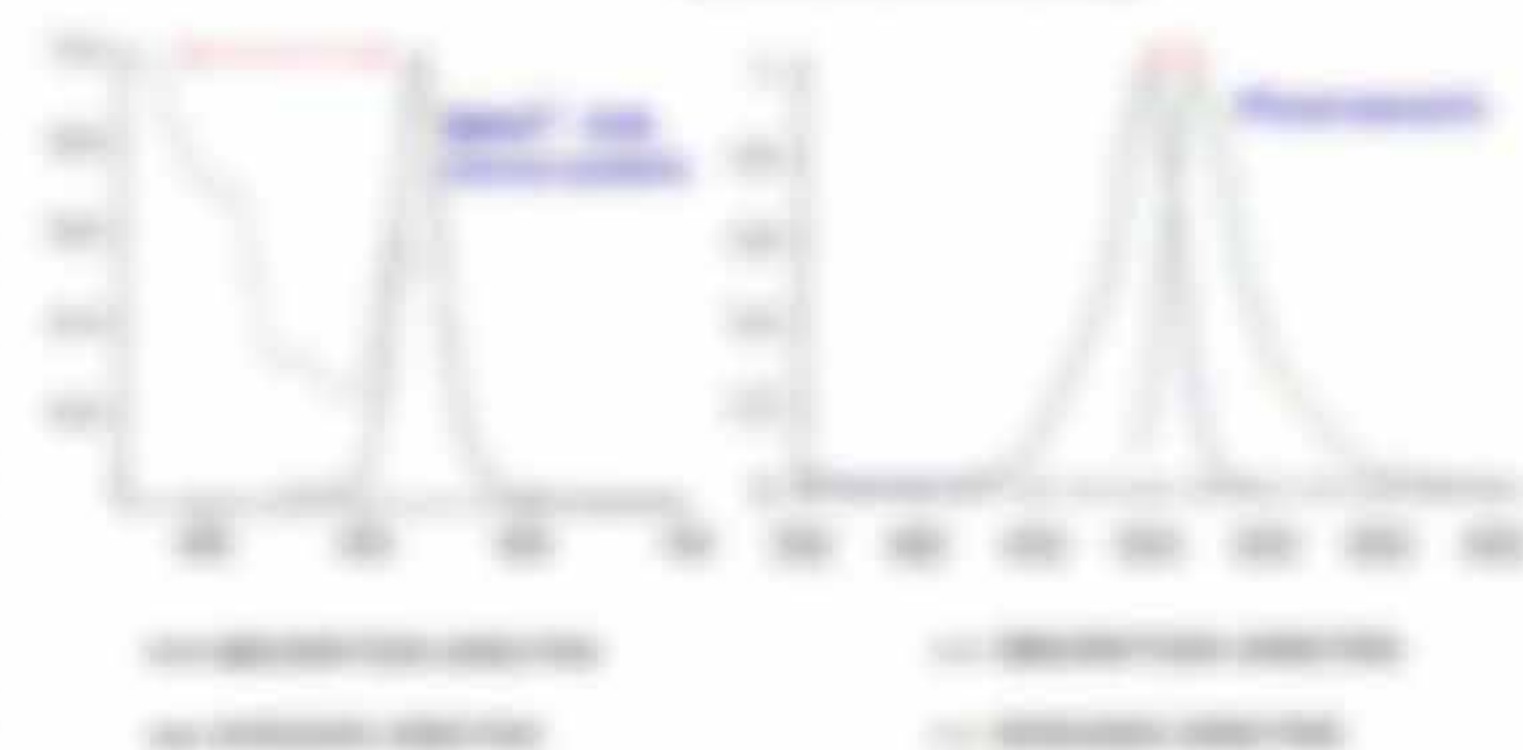
Wahrscheinlich ist, dass sich die verbleibende Fläche der Oberfläche A auch über die l verhalten können.

Optische Eigenschaften

1. Struktur Die Lichtstreuung erfolgt durch die Grenzflächen (Phasengrenzen) und die Partikeloberfläche selbst. Diese werden durch die Partikelgröße bestimmt und sind durch die Wellenlänge des Lichts gegeben. Die Lichtstreuung ist ein Prozess, bei dem Licht durch die Partikeloberfläche gestreut wird. Die Partikelgröße ist ein wichtiger Parameter, der die Lichtstreuung beeinflusst. Die Partikelgröße ist ein wichtiger Parameter, der die Lichtstreuung beeinflusst.



2. Spektrum Die Lichtstreuung ist ein Prozess, bei dem Licht durch die Partikeloberfläche gestreut wird. Die Partikelgröße ist ein wichtiger Parameter, der die Lichtstreuung beeinflusst. Die Partikelgröße ist ein wichtiger Parameter, der die Lichtstreuung beeinflusst.



verschiedene λ_{ex} emittieren. Das Anregungsspektrum ist aufgrund verschiedener unterschiedlicher Prozesse auch wieder verbreitert. GFP haben eine vielfach größere Lebenszeit in Fluoreszenz.

8. **Beobachtung:** GFP leuchten nur kurz, blinken aber ab und zu, d.h. sie gehen in den dunklen Triplet-Zustand. Relativ nur bei Einzelmolekülspektroskopie.

Erkenntnisse

1. **Erkenntnis:** Spezifische Fluoreszenz-Markierung in biologischen Zellen durch GFP-Überexpression
2. Herstellung von **transgenen** und **transferten** mit fast beliebigem Zelltypen



Erkenntnis: Zelle
Fluoreszenz

7. Appendix

7.1. Die optische Abbildung

Einzelne Abbildung in 2 Linsen

Die optische Abbildung geschieht durch ein 2F-System, wo einem Gegenstand der Höhe h_1 in der 2F der Höhe h_2 entsteht. Strahlen parallel zur optischen Achse werden an der Hauptebene der Linse gebrochen und gehen durch den Brennpunkt in Brennweite Abstand f Strahlen durch den Zentrum der Linse auf der optischen Achse werden nicht abgelenkt. Dies ist die Hauptebene H_1 bzw. H_2 und die Gegenstandsweite und die Bildweite.

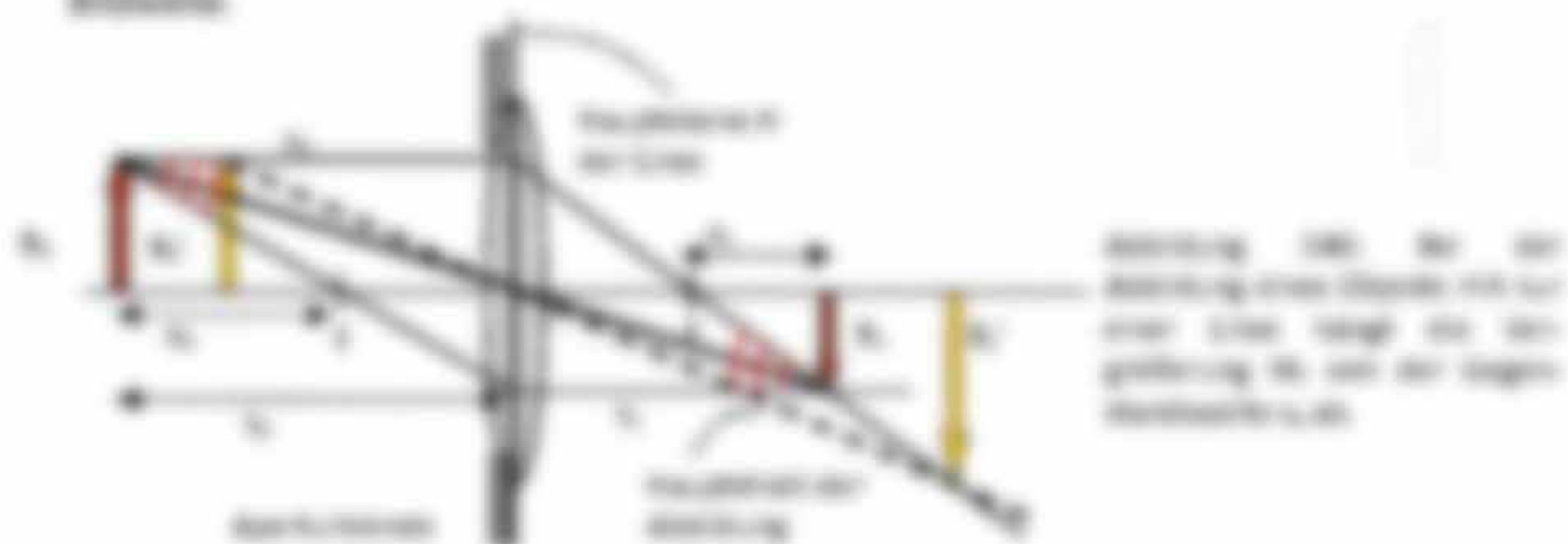


Abbildung 180: Bei der Abbildung eines Gegenstandes mit der Höhe h_1 liegt die Vergrößerung M mit der Gegenstandsweite s bei:

Formel zur Bestimmung der Vergrößerung $M = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s_2}{s_1}$ bzw. $M = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{s_2}{s_1}$ (18)

es gilt weiterhin die Gaußsche Formel $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ (19)

oder die Newton Formeln: $s \cdot s' = f \cdot f'$ (20)

Formeln für ein 2F-System

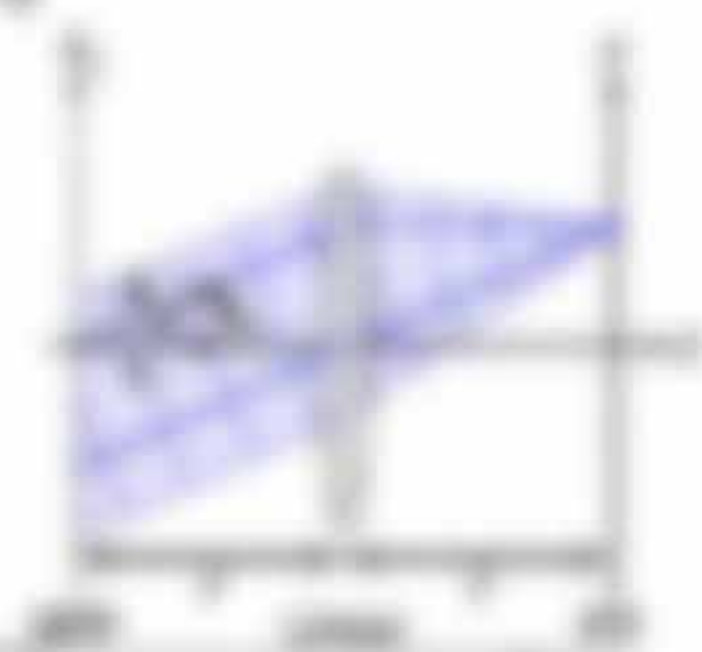
- Brennweitenverhältnis der Abbildungsmagnifikation $M = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s_2}{s_1}$ ändert sich nicht mit der Gegenstandsweite s oder der Bildweite s' .

- Strahlengang der Hauptebene läuft parallel zur optischen Achse und durch den gemeinsamen Brennpunkt der beiden Linsen im Abstand $f = f'$.

- Vergrößerung in 2F System: $M = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{s_2}{s_1}$ (21)

- Die Abbildung ist reell und vergrößert.

$M = \frac{h_2}{h_1} = \frac{s_2}{s_1}$ wobei $M = 1$ wenn $s_1 = s_2 = 2f$ ist. In der 2F geht über in ein 2F in der 2F (siehe Abb. rechts)



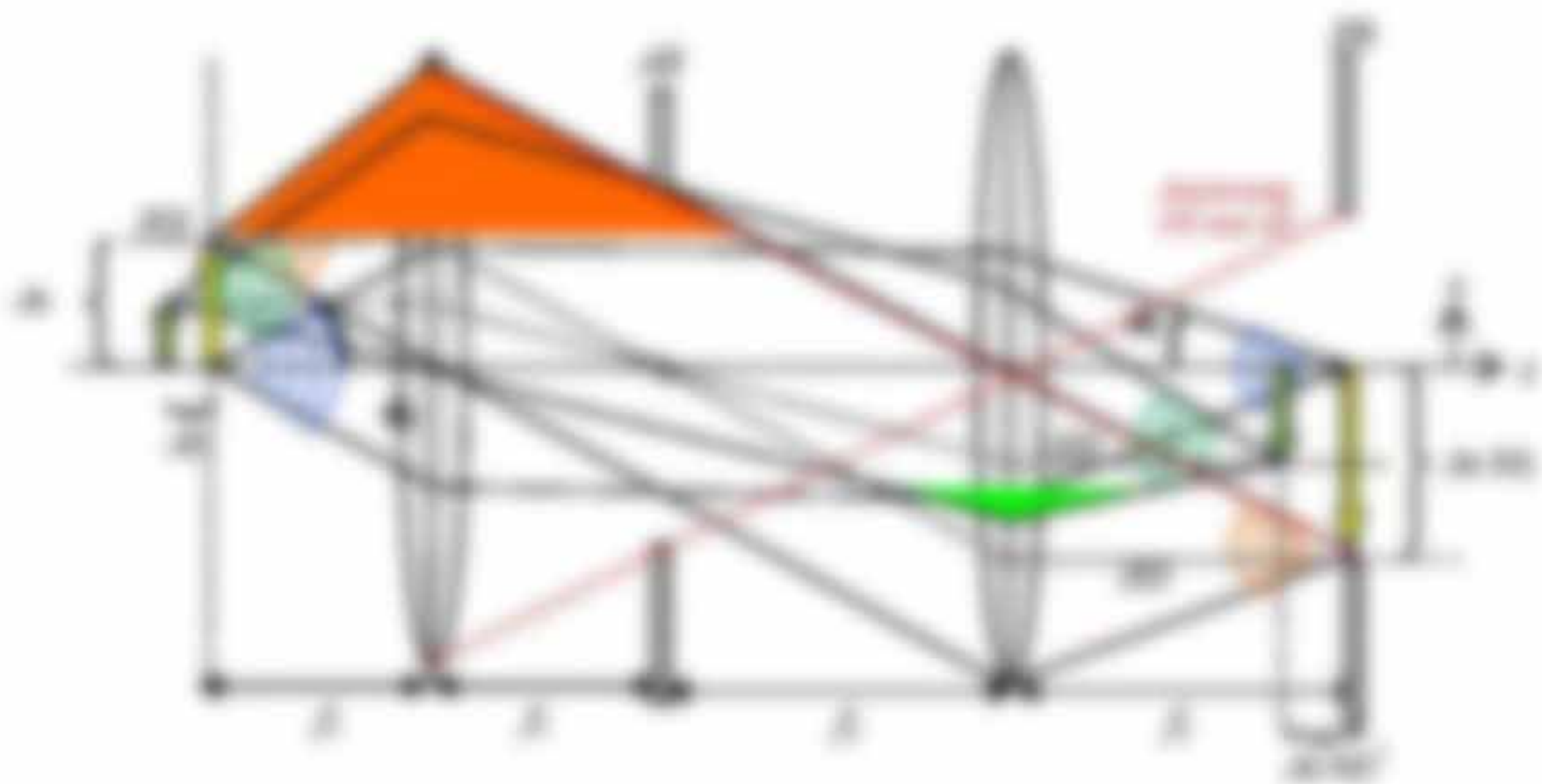


Abbildung 165: Die Vergrößerung ist einstufig von Gegenstandsweite und Brennweite, was hier an den gegenüberliegenden Fokaldistanzen f_1 jeweils für objektives System gesehen. Die Gegenstandsweite g_1 ist kleiner als die Brennweite f_1 des ersten Systems, die Erhöhung der Brennweite $f_2 = 2f_1$ und damit die Fokaldistanz in $2f_2$. Die Fokaldistanz f_2 muss an die $2f_1$ angepasst sein und liefert schließlich die Vergrößerung durch einen kleinen Gegenstandsweite g_2 vergrößert wird.



Abbildung 166: Vergrößerung gegenüber Bild (a) ist ein Vergrößerung und ist durch die gegenüberliegenden Fokaldistanzen f_1 an gegenüberliegenden Fokaldistanzen.

Link zu optischem System

<http://www.optischesystem.com/optisches-system/optisches-system/optisches-system.html>

7.2. Die inhomogene Helmholtzgleichung und das Streumittel

Die inhomogene Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (7.2)$$

lässt sich ableiten, indem man die Maxwell-Gleichungen in Materie (also mit $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{M}$) mit \mathbf{E} und $\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{M}$ mit \mathbf{E} kombiniert.

Diese Ladungen ($\mathbf{J} + \mathbf{M}$) = \mathbf{J} , ohne Ströme $\mathbf{J} = 0$ und Magnetisierung $\mathbf{M} = 0$, aber in Gegenwart von $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ findet man die inhomogene Helmholtzgleichung in der Form

$$\Delta u + k^2 u = -\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) \quad (7.3)$$

Die abstrakte Lösungsformel u , welche $u = \int_V \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} f(\mathbf{r}') dV'$ für freie und $u = \int_V \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} f(\mathbf{r}') dV' + \int_S \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial u}{\partial n'} dS'$ für dichtere Medien ist (siehe Eq. 7.4), lässt sich in ihrer Umkehrform durch eine Kernfunktion K beschreiben, welche $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ innerhalb und $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ außerhalb des Streuers ist (siehe Fig. 7.1).

$$u(\mathbf{r}) = \int_V K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' \quad (7.4)$$



Die Kernfunktion K beschreibt den Streuungsbeitrag von \mathbf{r}' im Medium auf \mathbf{r} im Streuer.

Mit $K = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ kommt man auf folgende Form der Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = -\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) \quad (7.5)$$

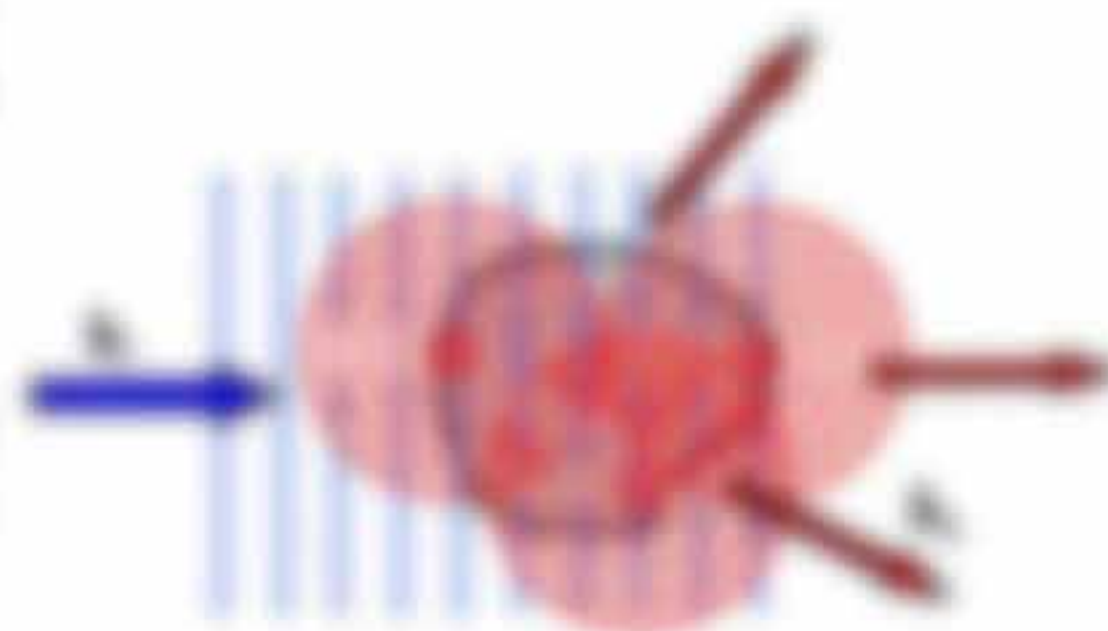
Eq. (7.5) lässt sich über eine Fredholm-Integralgleichung der 2. Art lösen. Im dichteren Fall, das wir hier vereinfachend annehmen, erhält man für die Gesamtheit

$$u(\mathbf{r}) = \int_V K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' + \int_S K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u}{\partial n'} dS' \quad (7.6)$$

Das Faltungsmittel bedeutet im Wesentlichen, dass an jeder Stelle im Streuerbereich mit einer Kugelfläche $(\Delta r^2) = \operatorname{div}(\mathbf{r} \mathbf{r}^T) = 3 \Delta r^2$ mit der lokalen Amplitude $u(\mathbf{r})$ des Streumittels interagiert wird. (Δr^2) ist die lokale Green'sche Funktion des freien Raums und ist eine Lösung der homogenen Helmholtzgleichung, welche auf eine Punktquelle $\delta(\mathbf{r})$ mit $(\Delta r^2) = -\delta(\mathbf{r})$ antwortet.

$$(\Delta r^2) u(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad (7.7)$$

Streuung tritt bei Überlagerung von Kugelmitteln in genau demselben Bereich auf, wie es bei getrenntem Fall, wenn man den Streuer mit $\delta(\mathbf{r})$ definiert.



3.2.1. Bornsche Näherung bzw. Rayleigh-Gans Theorie

Eq. (7.9) lässt sich lösen, indem man $\tilde{U}(\mathbf{r})$ durch $\tilde{U}(\mathbf{r})_0$ im Integranden ersetzt, was der Bornschen Näherung bzw. Rayleigh-Gans-Näherung entspricht.

Bedingung: Die Potentialbarriere $u(\mathbf{r})$ und die Partikelabmessungen d müssen relativ klein sein, so dass gilt $u(\mathbf{r}) \ll 1$, $kd \ll 1$ und damit die maximale Verschiebung der Wellenphase klein ist: $\Delta\varphi \ll \lambda$, $(n_1 - n_2)d \ll \lambda$. In dies erfüllt spricht man auch von **schwachen Streuern**.

Beispiel: Eine Laterne strahlt mit $d = \frac{1}{2} \lambda$ (z.B. $\lambda = 600 \text{ nm}$) $d = 300 \text{ nm}$ auf einen Streuer. Da sich bei dieser Streuung die Wellenfront nur einmal ändert, spricht man von einer **Einfachstreuung** bzw. einem **Einfachstreuungsprozess**.

Das obige Streutheorem (7.8) in der Bornschen Näherung heißt in Funktionen

$$\tilde{U}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \quad (7.10)$$

und es reicht daher über eine Fourier-Transformation zum Ort \mathbf{k} ($\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{0}$)

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = \frac{d^3r}{(2\pi)^3} u(\mathbf{r}) \tilde{U}(\mathbf{k}) = u(\mathbf{k}) \quad (7.11)$$

Es einer erfüllenden sternen Stelle: $\tilde{U}(\mathbf{k}) = u(\mathbf{k}) + \tilde{U}(\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k})$ (7.12)

Nach $\tilde{U}(\mathbf{k}) = (1 - \tilde{V}(\mathbf{k}))^{-1} u(\mathbf{k}) = (1 - \tilde{V}(\mathbf{k}))^{-1} \tilde{V}(\mathbf{k}) \tilde{U}(\mathbf{k})$ eine erfüllende sternen Stelle in Richtung $\mathbf{k}_i = (0, 0, k_i)$ ist, wird also die Fouriertransformation von $u(\mathbf{r})$, die Funktion $\tilde{U}(\mathbf{k})$, nur um \mathbf{k}_i verschoben, $\tilde{U}(\mathbf{k}) = \tilde{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i)$. Dieses moment, die **erhaltenen** Impulskomponenten des Streuers sind **invariant** heißt **Formfaktor**:

$$\tilde{U}(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) \quad (7.13)$$

Es beschreibt also eine der **überfunktion** $\tilde{U}(\mathbf{k}) = \tilde{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i)$, welche **invariant** sind und weiter übertragen werden sowie **richtungsabhängige Streuereigenschaften** in $F(\mathbf{k})$.

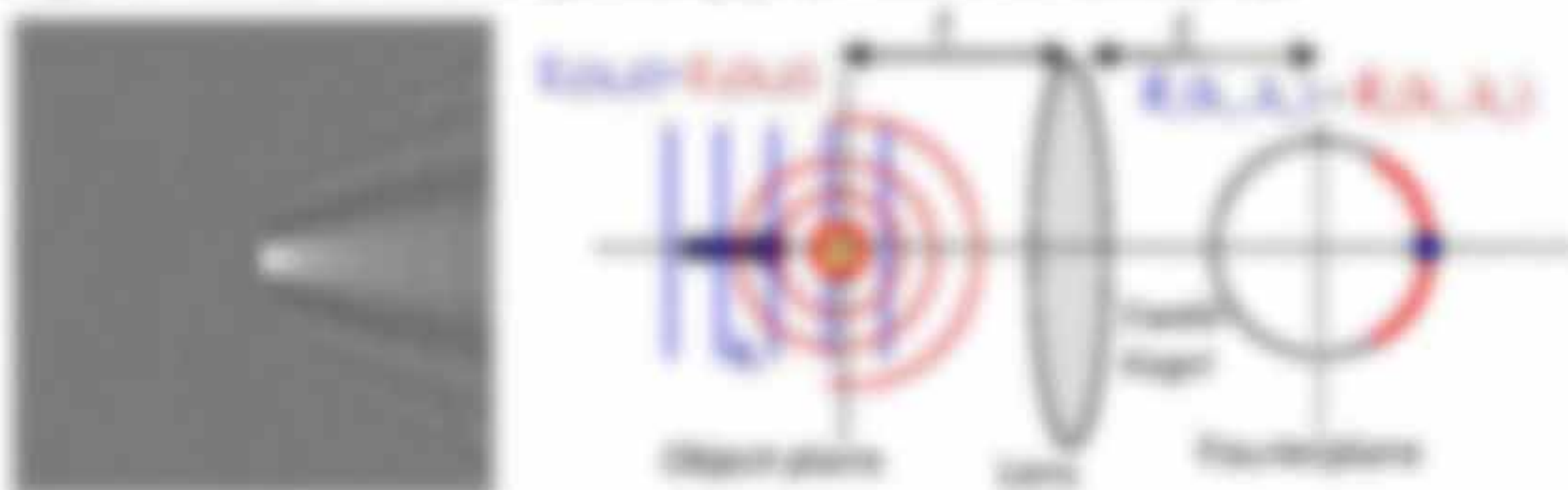


Abbildung 10: Streuung an einem sternen Stelle. Links: Laterne, die Licht auf einen Streuer wirft. Rechts: schematisches Diagramm eines Streuversystems. Ein einfallendes Lichtstrahl (blau) trifft auf einen Streuer (rot). Ein reflektierter Strahl (blau) verläuft parallel zum einfallenden Strahl. Ein gestreuter Strahl (rot) verläuft in eine andere Richtung. Die Wellenlänge λ ist eingezeichnet. Die Streuung erfolgt an einem Punkt, der als "Streuer" beschriftet ist. Die einfallende Wellenfront ist als "Einfallende Wellenfront" und die gestreute Wellenfront als "Gestrennte Wellenfront" beschriftet.

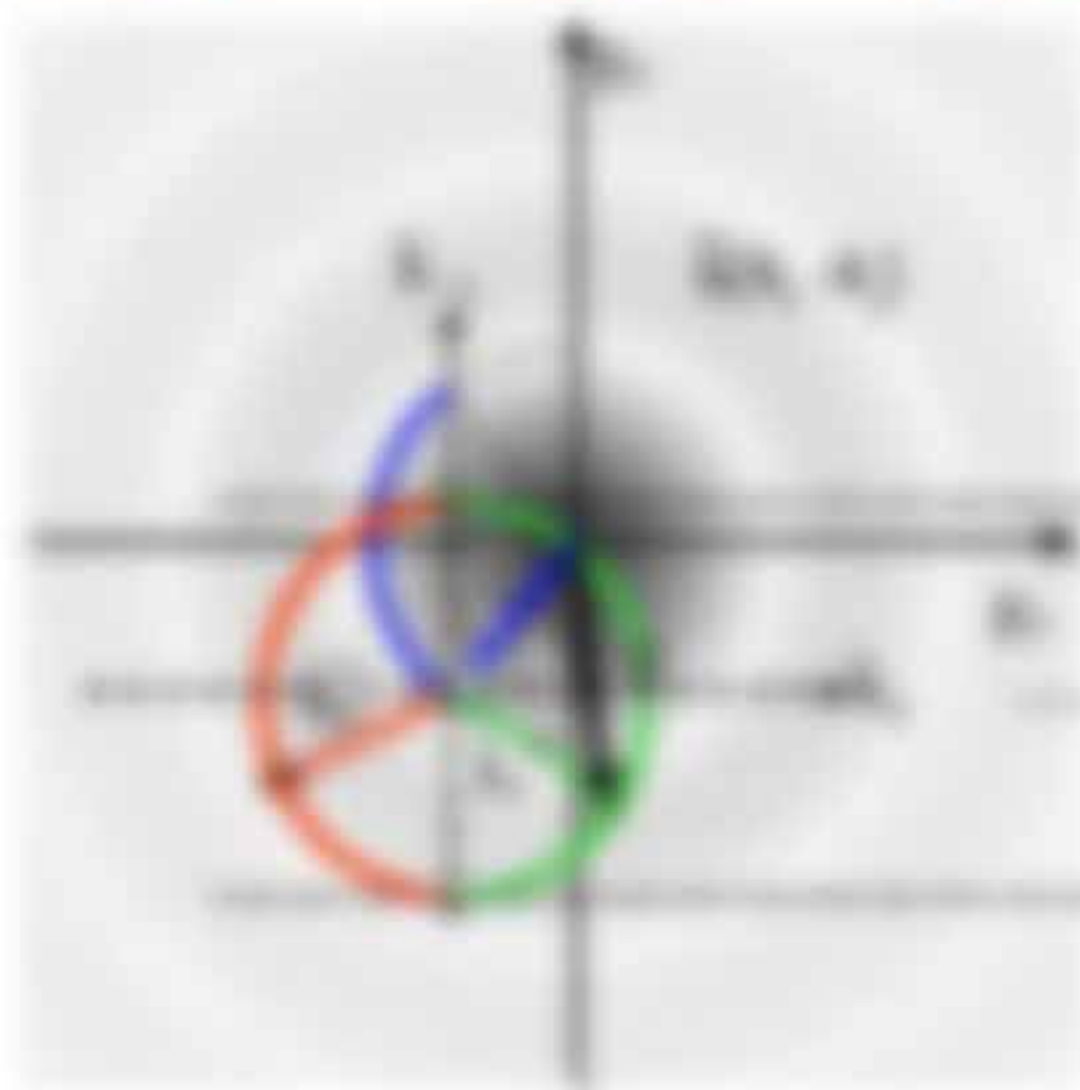
Die Fouriertransformierte der Green'schen Funktion $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$, also der Kugelschale, ist ein Ausdruck des freien Kugelspektrums (lange Schale, siehe Herleitung in Eq. 11.112)

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2} = \frac{1}{(k - \omega)(k + \omega)}$$

(11.113)

wobei $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = 1$ falls $k = |\mathbf{k}| = \omega = |\mathbf{k}|$ und $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ sonst.

11.2.2. Zweite Konstruktion für weiche Medien



Man veranschaulicht sich die Lösung des Streuspektrums $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ grafisch über das Einheitskreisproblem in einem weichen Objekt nach dem Schema $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{k}'$.

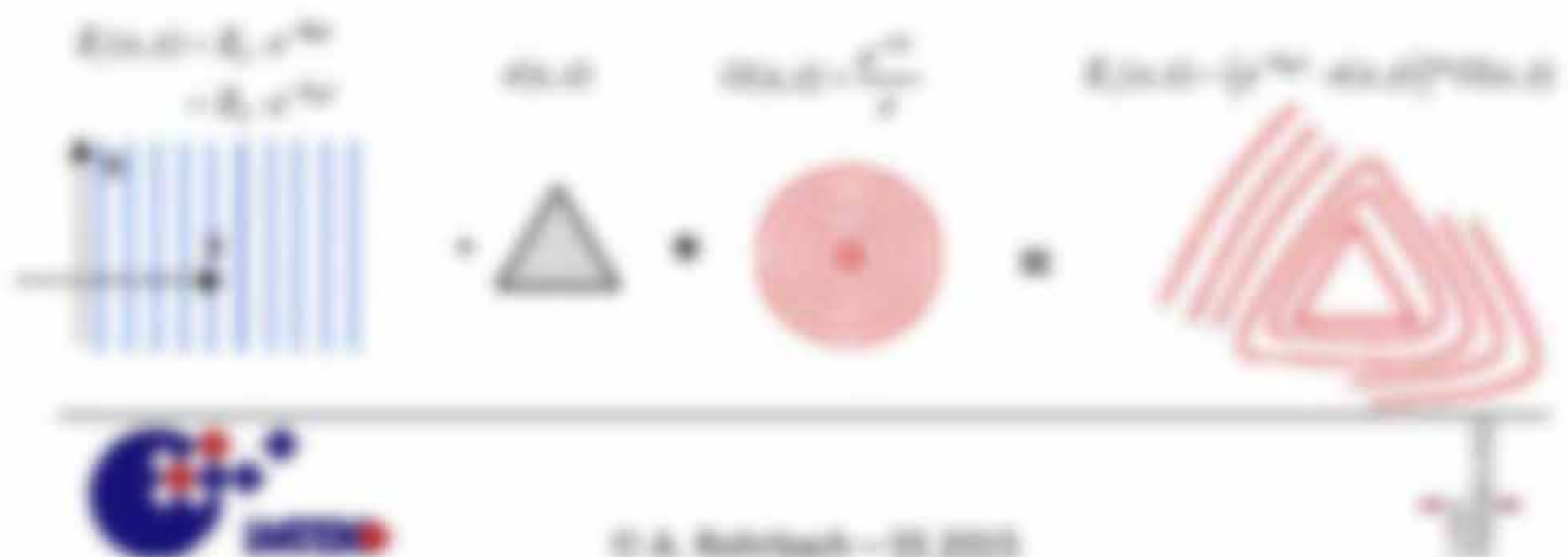
Störung des Systems des Streuspektrums $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ aus dem freien Spektrum $\tilde{G}_0(\mathbf{k}, \omega)$ des Streuspektrums des freien Systems. Die Lösung ist $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{G}_0(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{G}_1(\mathbf{k}, \omega) + \dots$ wobei $\tilde{G}_1(\mathbf{k}, \omega)$ die erste Ordnung der Störung ist. Die Lösung ist $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{G}_0(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{G}_1(\mathbf{k}, \omega) + \dots$ wobei $\tilde{G}_1(\mathbf{k}, \omega)$ die erste Ordnung der Störung ist.

Das um den einfallenden \mathbf{k} -Vektor verschobene Inzidenzspektrum eines Objekts $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ schneiden die Freispektrumschale. Diese Schnittpunkte sind erlaubte Inzidenzpunkte von der einfallenden auf die gestreute Welle und definieren das Streuspektrum $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$.

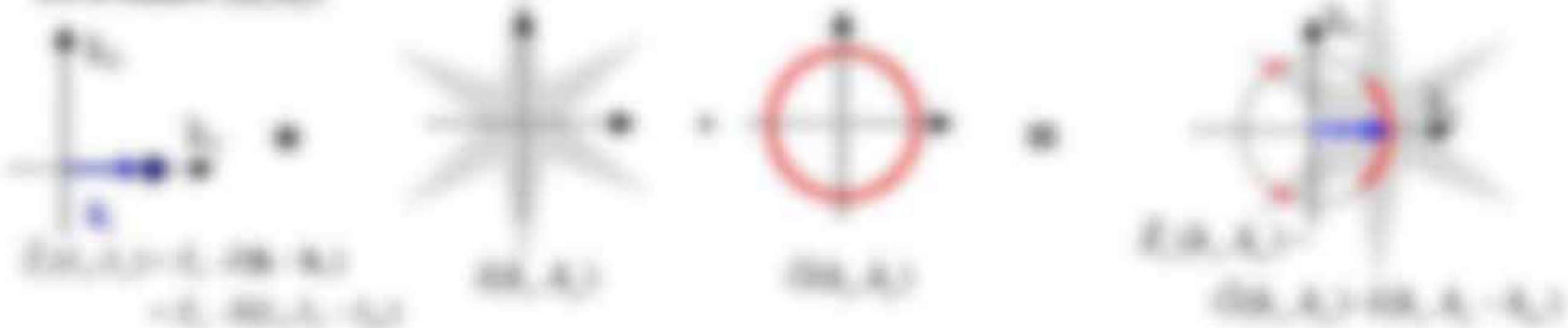
Das Spektrum $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ der Fouriertransformierte des gestreuten Feldes $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2} = \frac{1}{(k - \omega)(k + \omega)}$ ist die Streulösung ($\omega =$ Multiplikation) aus der Kugelschale mit dem um \mathbf{k} verschobenen Spektrum des Streuspektrums ($\mathbf{k} =$ Addition). Die Streulösung kann sich als Funktion von \mathbf{k} schreiben, wobei $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{k}'$ (symmetrisch symmetrisch) wird.

Erweiterung der weichen Lösung

in Dimensionen $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{k}'$



Wahlraum \mathbb{R}, \mathbb{C}



Wichtig für Bestimmung der Streufunktion $f(\theta, \varphi)$ ist die Streufunktion $f(\theta, \varphi)$.

3.2.2. Streufunktion für kleine Streuer

Die Streufunktion $f(\theta, \varphi)$ für kleine Streuer ergibt sich nach [1] zu

$$\begin{pmatrix} f(\theta, \varphi) \\ f(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \text{Re} \{ f(\theta, \varphi) \} \\ \text{Im} \{ f(\theta, \varphi) \} \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

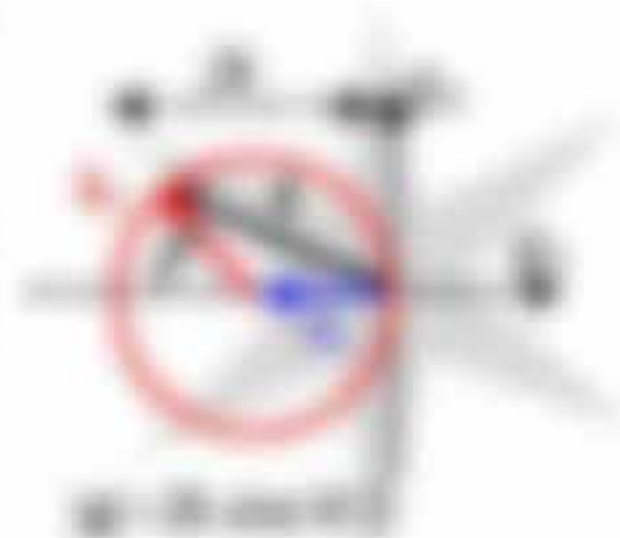
mit dem Formfaktor für \mathbb{R} oder \mathbb{C} $f(\theta, \varphi) = \frac{1}{k} \int_V \text{Re} \{ \rho(r) e^{-i k r} \} e^{i k r} dV$ (3.2.3)

wobei $\text{Re} \{ \rho(r) \} = 1$ für \mathbb{R} (\mathbb{R}, \mathbb{C}) und \mathbb{C} ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}$) ist die Phasenverschiebung bei Durchlauf der Welle durch den Partikel definiert als

$$\text{Re} \{ \rho(r) \} = e^{-i k r} = e^{-i k \sqrt{r^2 - z^2}} = e^{-i k r \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} = e^{-i k r \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \quad (3.2.4)$$

mit dem Radius r und dem Winkel $\varphi = \arccos \frac{z}{r}$ für eine ebene Welle mit Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$, $r = \lambda$.

Für einen Streuer kleiner als λ gilt $\varphi \approx \pi/2$, da die Streuung in alle Richtungen φ gleich ist. Hierbei ist φ der Winkel des \mathbb{C} , welches zur optischen Achse, so dass $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cos \varphi$.



Es gilt dann die Streufunktion $f(\theta, \varphi)$ bzw. $f(\theta, \varphi)$ bzw. $f(\theta, \varphi)$

$$\text{Für Streuer kleiner als } \lambda: \begin{pmatrix} f(\theta, \varphi) \\ f(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \text{Re} \{ f(\theta, \varphi) \} \\ \text{Im} \{ f(\theta, \varphi) \} \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Für Streuer kleiner als λ sind die Streufunktionen

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{k} \int_V \text{Re} \{ \rho(r) \} e^{-i k r} dV, \quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{k} \int_V \text{Im} \{ \rho(r) \} e^{-i k r} dV \quad (3.2.6)$$

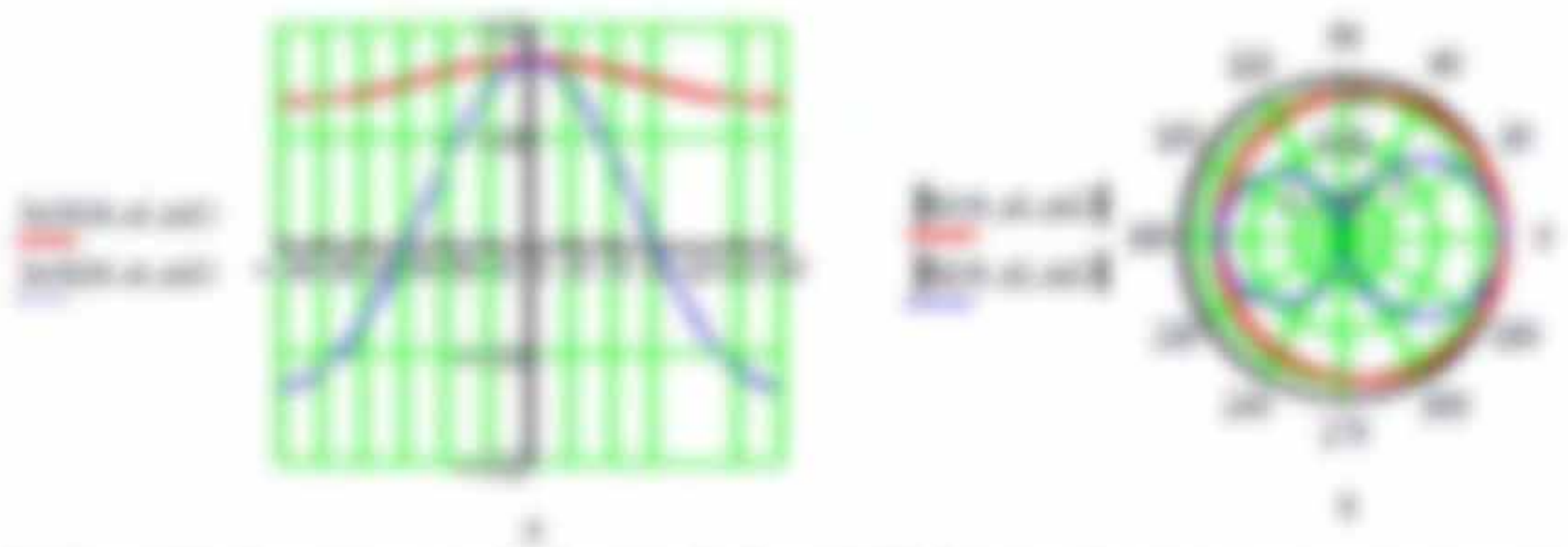


Abbildung 10: Die Struktur der Matrix A (a) und B (b) für einen Algorithmus zur Berechnung der Hauptknoten-Wertung. Linien im Diagramm (a) und (b) sind die Werte der Knoten und Kanten.

7.8. Signal und Rauschen

Licht ist quantisiert und tritt in zufälligen Abständen bei einem Detektor ein. Das führt zu einem Rauschen im Messsignal.

Photon Statistik

Die Detektor von Photonen gehorcht einer Poisson-Verteilung, also einem wiederholten Bernoulli-Experiment mit Ausgängen 1 oder 0, Photon μ oder kein Ausgung μ , denn die Ereignisse sind unabhängig.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_n wird durch den Parameter λ , hier die mittlere Ereigniszahl Photonen pro Detektor, bestimmt, der gleichzeitig Erwartungswert und Varianz der Verteilung ist. Es ergibt sich für $n = 0, 1, 2, \dots$ Photonen:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (7.20)$$

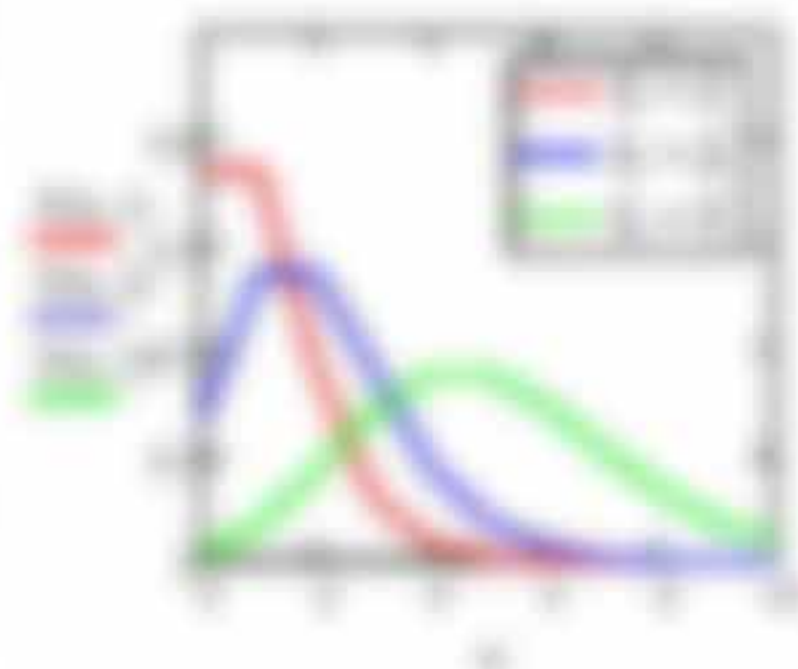


Tabelle 7.8: Im Mittel $\lambda = 5$ Photonen pro μ auf ein Foto, es beschreibt P_n die Wahrscheinlichkeit, in der nächsten μ Photonen zu messen. Oben rechts sieht man die Poisson-Verteilung für große λ der Normalverteilung.

Photon-Statistik

Die Photonenabsorption im Detektor ist zufällig und optische Signale entstehen vermehrt. Bei n der Photonen als Folge einer Photonenabsorption mit μ und einer Abschwächung α des Detektors μ :

$$n = \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\lambda} \quad (7.21)$$

Mit dem Mittelwert des Photostroms

$$\langle n \rangle = \frac{\lambda}{\alpha} \left(1 - e^{-\lambda} \right) \quad (7.22)$$

Für zufällige Photonenabsorption ergibt sich die Varianz des Photostroms

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 &= \frac{\lambda}{\alpha} \left(1 - e^{-\lambda} \right) - \left(\frac{\lambda}{\alpha} \left(1 - e^{-\lambda} \right) \right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{\alpha} \left(1 - e^{-\lambda} \right) - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Es ist der Detektor schwach ($\alpha \ll 1$), so kann er einzelne Photonen mit einer Verstärkung $\alpha \gg 1$ messen.



Abbildung 108: Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, Rauschenverhältnis ρ , Rauschenverhältnis ρ_{eff} , sowie ρ , Faktor k für den Rauschfaktor k (siehe Text).

Signal-Rausch-Verhältnis

Abgesehen von der SNR oder SNR-Verhältnis des Verteilers, das mittlere Signalleistung zur mittleren Rauschleistung, ist SNR = Signal / Rausch. Nach der Formel lautet es:

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \sqrt{K} \cdot T \cdot B \quad (7.25)$$



wobei B die Anzahl der Frequenzkanäle ist. Wegen $SNR = P_s/P_n = 10$ gilt für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{10}$.

Wenn man pro Kanal ein Mittel $B = 100$ Kanäle, so ist die Schwankung $\sigma = \sqrt{10} = 100$ Kanäle.

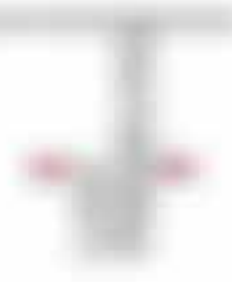
Weitere Rauschquellen: Grundrauschen ρ_0 und Ausbreitungsverlust ρ_{eff} des Ausbreitungsverlustes (siehe Text) $\rho_{\text{eff}} = 100$. Es ergibt sich somit insgesamt für das SNR:

$$SNR = \frac{P_s}{\sqrt{P_n + P_{n0} + P_{n_{\text{eff}}}}} = \frac{P_s}{\sqrt{P_n + P_{n0} + P_{n_{\text{eff}}}}} \quad (7.26)$$

Rausch-Engpass

Die wichtigsten Kenngrößen zur Charakterisierung der Qualität von CD-Disks:

- Die **Quadratwurzel σ** hängt von der Luft-Druckhöhe h und kann über 10% betragen (empfohlener Wert: 5-10%).
- Die **Full-Well-Capacity** ist die Anzahl der Ladungen, die in einem Pixel gespeichert werden können bis der Ladungspunkt erreicht ist (max. 10^7 e⁻).



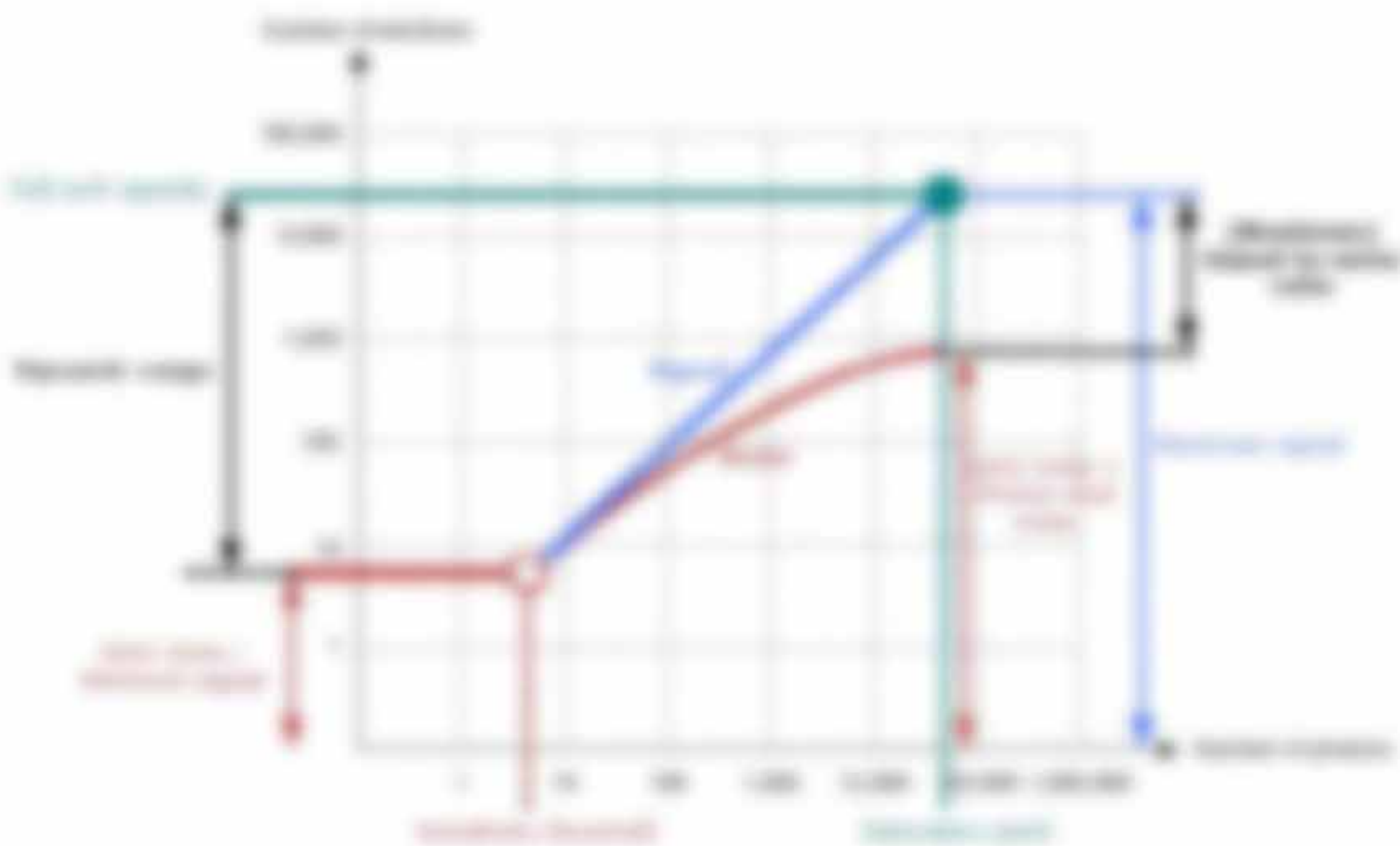


Abbildung 188: Bewertung der Systemparameter als Funktion der Wirkungsgrade des Prozess. Durch die nicht-lineare Charakteristik resultiert...

- Die Effizienz des Ladungstransports zum Auswertewertler (Charge Transfer Efficiency)
- Der Rauschen des Auswertewertlers (Auswertewertler, „readout noise“)
- Der Dunkelstrom der lichtempfindlichen Zellen ist nicht für alle Pixel völlig gleich, es kommt daher zu Dunkelstromrauschen („ σ eine Quelle des Bildrauschens), z.B. sind „hot pixels“ Pixel mit besonders hohem Dunkelstrom.
- Der Dynamikumfang (DR) ist das Verhältnis von maximalem zu minimalem messbarem Signal, berücksichtigt aber kein Rauschen.
- Das maximale Signal-zu-Rausch-Verhältnis ist das Verhältnis von maximalem Signal zum jeweiligen Prozessrauschpegel, Rauschlevel und wächst linear mit N .

Wichtig: Dunkelstrom und Rauschen sind durch das DR werden bei lichtempfindlichen Sensoren durch Kühlen des CCD-Chips auf -80°C bis -100°C verringert. Das Rauschen kann zum Beispiel auf unter drei Elektronen pro Pixel und Stunde durch Kühlung mit flüssigem Stickstoff gebracht werden. Somit kann eine Reduktion um wenige Rausch-Elektronen pro Sensor des DR z.B. verdoppelt, was entsprechend über 20% zu (im Bild) Erhöhung ist.

Ein Auswertewertler als Beispiel:

Parameter	Wert	Einheit
Quantenwirkungsgrad	45	%
Rauschen	10	e ⁻
Hot Pixel	10	e ⁻
Hot Pixel Dichte	10	e ⁻ /Pixel
Hot Pixel Dichte	10	e ⁻ /Pixel
Hot Pixel Dichte	10	e ⁻ /Pixel



Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20

Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20

Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20

Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20

Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20

Umsatz	100
Waren	20
Warenzugang	20
Warenverkauf	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20
Warenverkauf	20
Warenzugang	20
Warenbestand	20



1. What is your gender?
 Male _____ Female _____
 2. What is your age?
 18-24 _____ 25-34 _____
 35-44 _____ 45-54 _____
 55-64 _____ 65-74 _____
 75+ _____
 3. How long have you been using the product?
 Less than 1 year _____ 1-3 years _____
 4-6 years _____ 7-9 years _____
 10 years or more _____
 4. How often do you use the product?
 Daily _____ Weekly _____
 Monthly _____ Rarely _____
 5. How satisfied are you with the product?
 Very satisfied _____ Satisfied _____
 Dissatisfied _____ Very dissatisfied _____
 6. How likely are you to recommend the product to others?
 Very likely _____ Likely _____
 Unlikely _____ Very unlikely _____
 7. How do you rate the overall quality of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 8. How do you rate the overall value of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

9. How do you rate the overall performance of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 10. How do you rate the overall reliability of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 11. How do you rate the overall durability of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 12. How do you rate the overall safety of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 13. How do you rate the overall ease of use of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 14. How do you rate the overall customer service of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 15. How do you rate the overall warranty of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

16. How do you rate the overall price of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 17. How do you rate the overall appearance of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 18. How do you rate the overall functionality of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 19. How do you rate the overall design of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 20. How do you rate the overall packaging of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

21. How do you rate the overall customer support of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 22. How do you rate the overall training of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 23. How do you rate the overall documentation of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 24. How do you rate the overall user manual of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 25. How do you rate the overall help desk of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

26. How do you rate the overall user interface of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 27. How do you rate the overall navigation of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 28. How do you rate the overall search of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 29. How do you rate the overall filtering of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 30. How do you rate the overall sorting of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

31. How do you rate the overall filtering of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 32. How do you rate the overall sorting of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 33. How do you rate the overall pagination of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 34. How do you rate the overall loading of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 35. How do you rate the overall responsiveness of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

36. How do you rate the overall security of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 37. How do you rate the overall privacy of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 38. How do you rate the overall accessibility of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 39. How do you rate the overall compatibility of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 40. How do you rate the overall integration of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

41. How do you rate the overall interoperability of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 42. How do you rate the overall scalability of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 43. How do you rate the overall flexibility of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 44. How do you rate the overall customizability of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____
 45. How do you rate the overall extensibility of the product?
 Excellent _____ Good _____
 Fair _____ Poor _____

